UNIVERSITÄT LEIPZIG

Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Über die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur von Matlis-Dualen lokaler Kohomologiemoduln

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Mathematiker

vorgelegt von

Danny Tobisch
geboren am 24.01.1983 in Zerbst/Anhalt

Betreuender Hochschullehrer: Prof. Dr. Jürgen Stückrad

Leipzig, 15. Februar 2010

Zusammenfassung

Durch eine Arbeit von Gennady Lyubeznik ([Lyu93]) hat sich herausgestellt, dass $\mathcal{D}$-Moduln in Charakteristik Null ein wichtiges Mittel zur Untersuchung von lokalen Kohomologiemoduln darstellen. In positiver Charakteristik scheinen die ebenfalls von Lyubeznik in [Lyu97] eingeführten $\mathcal{F}$-Moduln das passende Analogon zu sein. In beiden Fällen ergeben sich wichtige Endlichkeitsbedingungen an die Moduln $H_I^i(R)$. Andererseits hat sich gezeigt, dass sich die Untersuchung der Matlis-Duale von bestimmten lokalen Kohomologiemoduln, genauer der Moduln $D(H_I^i(R)) = Hom(H_I^i(R), E(R/m))$, unter gewissen Umständen dazu eignet, Fragen über die Moduln $H_I^i(R)$ zu klären. Insbesondere die Frage, ob lokale Kohomologiemoduln artinsch sind oder Aussagen über mengentheoretisch vollständige Durchschnitte lassen sich mit Informationen über die Matlis-Duale beantworten. Dabei sei R lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $E(R/\mathfrak{m})$ die injektive Hülle des Residuenkörpers von R. Michael Hellus hat in [Hel07b] gezeigt, dass diese Matlis-Duale im Fall eines Potenzreihenringes R über einem Körper $\Bbbk$ der Charakteristik Null eine kanonische $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzen, aber im Allgemeinen Beispiele für $\mathcal{D}$-Moduln liefern, welche nicht holonom sind. Ziel dieser Arbeit soll es sein, zu zeigen, dass in diesem Fall $D(H_I^i(R))$ in positiver Charakteristik eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur trägt, im Allgemeinen aber nicht $\mathcal{F}$-endlich ist. Außerdem werden wir die engen Zusammenhänge zwischen $\mathcal{D}$-Moduln und $\mathcal{F}$-Moduln, welche in positiver Charakteristik zu beobachten sind, noch näher untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, dass das Ergebnis von Hellus aus [Hel07b] über die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur und unser Ergebnis über die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der Moduln $D(H_I^i(R))$ in Charakteristik $p > 0$ gerade die Manifestation derselben Besonderheiten sind. Insbesondere zeigt sich, dass eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur in positiver Charakteristik auch eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur induziert. Dies verallgemeinert das Ergebnis von Hellus über die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur in Charakteristik Null auf den Fall von Charakteristik $p > 0$.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist als Abschlussarbeit meines Studiums am Mathematischen Institut der Universität Leipzig entstanden und dokumentiert somit mein Wirken des letzten Jahres. Sie bildet damit den Abschluss eines besonders prägenden Lebensabschnittes und gleichzeitig den Beginn einer neuen persönlichen Unabhängigkeit. Ich möchte dies zum Anlass nehmen, mich an dieser Stelle bei allen Menschen zu bedanken, die mir das Anfertigen dieser Diplomarbeit ermöglicht haben und mich während dieser Zeit begleitet und unterstützt haben.

Mein Dank gilt vor allem Herrn Prof. Dr. Jürgen Stückrad, der mich zur Bearbeitung der vorliegenden Inhalte motivierte, mich engagiert und aufmerksam betreut hat und jederzeit für klärende Gespräche oder die Korrektur erster Entwürfe Zeit gefunden hat. Mein Interesse an den vielen abstrakten Gedankengebäuden der Mathematik verdanke ich zu einem großen Teil ihm.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dr. Michael Hellus, der mich ebenfalls hervorragend betreut hat und mir jederzeit mit Ratschlägen und neuen Ideen zur Seite stand. Auch nachdem er die Universität Leipzig im Herbst letzten Jahres verlassen hatte, bereicherte er mein Arbeiten durch viele wichtige Bemerkungen, ohne die die Arbeit so nicht existieren würde.

Ein herzliches Dankeschön geht des Weiteren an meine gute Freundin und Kommilitonin Laila Popović, die mir während meines ganzen Studiums eine große Unterstützung war und die sich vor allem in den letzten Wochen viel Zeit genommen hat, die Arbeit zu einem guten Ende zu bringen. Außerdem danke ich ihr und Ralf Griger für das finale Korrekturlesen. Zudem danke ich Sarah für ihr Verständnis und ihre ständige Rückendeckung.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meinen lieben Eltern, ohne die dieses Studium nicht möglich gewesen wäre. Mit ihrer Unterstützung ermöglichten sie mir schöne Jahre in Leipzig, sowie die Erfahrung eines Studienaufenthaltes in Madrid.

Leipzig, Februar 2010 — Danny Tobisch

Kapitel 1

Einleitung

> "In the judgment of the most competent living mathematicians, Fräulein Noether was the most significant creative mathematical genius thus far produced since the higher education of women began."
>
> Albert Einstein ([Ein35])

In der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra sind die lokalen Kohomologiemoduln seit ihrer Einführung vor gut 50 Jahren von großem Interesse. Dabei handelt es sich um eine mathematische Konstruktion, die Anfang der 60er Jahre von Grothendieck in [Gro67] gemacht wurde, um geometrische Fragen zu beantworten. Mittlerweile ist die Theorie der lokalen Kohomologie ein fester Bestandteil für die Untersuchung von kommutativen noetherschen Ringen. Betrachtet man Ringe als Funktionen auf Räumen, so lassen sich auch geometrische und topologische Inhalte untersuchen. Ursprünglich waren die lokalen Kohomologiefunktoren dabei als spezielle Garbenkohomologie definiert. Sei dazu X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X, so betrachtet man die globalen Schnitte mit Support in Y, also die Menge $\Gamma_Y(X;\mathcal{F})$. Nun definiert man die lokalen Kohomologiegruppen von X mit Hilfe der rechtsabgeleiteten Funktoren dieser Zuordnung, also als $H^i_Y(X,\mathcal{F}) := R^i\,\Gamma_Y(X,\mathcal{F})$. Betrachten wir einmal den Spezialfall $X = Spec\,R$ für einen kommutativen Ring R und die quasikohärente Garbe $\tilde{M}$ für einen R-Modul M. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal, so ist $V(I)$ abgeschlossen in der Zariski-Topologie und man definiert die lokalen Kohomologiemoduln von M mit Support in I als $H^i_I(M) := H^i_{V(I)}(Spec\,R, \tilde{M})$. Diese Definition lässt sich jetzt vollständig vom geometrischen Hintergrund lösen und spezialisiert sich zu der folgenden Konstruktion in der kommutativen Algebra. Dabei ordnet dann die lokale Kohomologie einem gegebenen Ideal $I \subseteq R$ eines noetherschen Ringes R und einem R-Modul M eine Folge von Moduln $H^i_I(M)$ zu, den sogenannten lokalen Kohomologiemoduln. Betrachtet man den Untermodul $\Gamma_I(M) = \{m \in M \mid I^t m = 0 \text{ für ein } t \in \mathbb{N}\}$ von M, der aus allen Elementen von M besteht, welche von einer Potenz von I annulliert werden, so ist die Zuordnung

$$M \longmapsto \Gamma_I(M)$$

im Sinne der homologischen Algebra nicht exakt. Die lokalen Kohomologiemoduln sind nun ein Maß dafür, wie stark diese funktorielle Zuordnung von dieser Exaktheit abweicht. Selbst für einen endlich erzeugten R-Modul M sind die lokalen Kohomologiemoduln meist nicht endlich erzeugt und verhalten sich somit nicht besonders gutartig. Ihre Eigenschaften spielen aber eine große Rolle in allen Anwendungen der lokalen Kohomologie-Theorie. Daher interessiert man sich für die Struktur dieser Moduln, insbesondere für gewisse Endlichkeitsaussagen.

So ist es zum Beispiel eine wichtige Aufgabe zu entscheiden, ob die Menge $Ass(H_I^i(R))$, also die Menge der assoziierten Primideale der i-ten lokalen Kohomologie von R selbst, endlich ist. Diese Frage wurde von Huneke in [Hun92] gestellt und Huneke und Sharp konnten in [HS93] zeigen, dass für einen regulären lokalen Ring positiver Charakteristik, welcher einen Körper $\mathbb{k}$ enthält, diese Menge immer endlich ist. Ebenso konnte Lyubenznik in [Lyu93] und [Lyu00b] zeigen, dass für unverzweigte reguläre lokale Ringe von gemischter Charakteristik oder von Charakteristik Null die Menge $Ass(H_i^i(R))$ immer endlich ist.

Eine weitere Frage, die von Huneke in [Hun92] gestellt wurde, ist es zu entscheiden, ob ein gegebener lokaler Kohomologiemodul $H_I^i(M)$ für einen endlich erzeugten R-Modul M artinsch ist. Sei dazu $(R, \mathfrak{m}, \mathbb{k})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist $H_I^i(M)$ genau dann artinsch, falls $Supp(M) = \{\mathfrak{m}\}$ gilt und der Sockel von M, also $Hom_R(\mathbb{k}, M)$ endlich erzeugt ist. Ist $dim\, R/I = 0$, so hat man die Struktur von $H_I^i(M)$ gut verstanden (siehe [Gro67]). Obwohl nicht zwingend endlich erzeugt, sind die lokalen Kohomologiemoduln dann artinsch, also insbesondere $Hom_R(\mathbb{k}, H_I^i(M))$ endlich erzeugt. Ist aber $dim\, R/I > 0$, so ist dies nicht notwendigerweise der Fall, wie das folgende Beispiel von Hartshorne zeigt.

Beispiel 1.1 (Hartshorne's Beispiel, Beispiel 5.2.4). *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper und sei R die Hyperfläche*

$$\mathbb{k}[[w, x, y, z]]/(wx - yz).$$

Sei außerdem $I \subseteq R$ das Ideal von R, das von den Klassen von x und y in R erzeugt wird, also $I = (x, y)$. Dann ist $H_I^2(R)$ nicht artinsch, insbesondere ist $Hom_R(R/\mathfrak{m}, H_I^2(R))$ nicht endlich erzeugt.

Außerdem kann somit auch $Hom_R(R/I, H_I^2(R))$ nicht endlich erzeugt sein und dies zeigt, dass die von Grothendieck gemachte Vermutung, dass $Hom_R(R/I, H_I^2(R))$ für jedes Ideal I von R endlich erzeugt ist, falsch ist (siehe Vermutung 5.2.3).

Allgemeiner lässt sich nach der Endlichkeit der sogenannten Bass-Zahlen fragen, wobei die i-te Bass-Zahl $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ eines kommutativen noetherschen Ringes R und einen R-Modul M wie folgt definiert ist. Der i-te auftretende Term $E^i(M)$ in einer minimalen injektiven Auflösung von M ist bis auf Isomorphie eindeutig durch M bestimmt. Es gilt $E^i(M) \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_R(R/\mathfrak{p}_\alpha)$ mit einer Familie $(\mathfrak{p}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ von Primidealen von R. Dabei ist die Kardinalität der Menge $\{\alpha \in \Lambda : \mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}\}$ eindeutig durch M bestimmt und wird mit $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ bezeichnet. Sei $k(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ der Residuenkörper des lokalen Ringes $R_\mathfrak{p}$, so lassen sich die Bass-Zahlen auch als folgende Vektorraum-Dimensionen charakterisieren: $\mu^i(\mathfrak{p}, M) = dim_{k(\mathfrak{p})} Ext^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$. Ist $(R, \mathfrak{m}, \mathbb{k})$ ein noetherscher lokaler Ring, so gilt also $\mu^0(\mathfrak{m}, M) = dim_\mathbb{k} Hom_R(\mathbb{k}, M)$.

Diese Fragen ließen sich besonders im Fall eines regulären Ringes R gut untersuchen und in vielen Fällen positiv beantworten. So konnten Huneke und Sharp in [HS93] im Fall positiver Charakteristik das folgende Ergebnis formulieren.

Satz 1.2 (Theorem 2.1/Corollary 2.3 in [HS93]). *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, und sei $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Sei außerdem $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ und $j \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$:*

(i) $\mu^i(\mathfrak{p}, H_I^j(R)) \leq \mu^i(\mathfrak{p}, Ext_R^j(R/I, R)) \leq \infty$.

(ii) $Ass(H_I^j(R)) \subseteq Ass(Ext_R^j(R/I, R))$*, insbesondere ist* $Ass(H_I^j(R))$ *endlich.*

Dabei verwendet der Beweis dieses Satzes im Grunde zwei wichtige Eigenschaften der lokalen Kohomologie im Fall eines regulären Ringes. Sei dazu R ein kommutativer noetherscher regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Methoden, die uns in positiver Charaktertistik zur Verfügung stehen, ist der sogenannte Frobeniushomomorphismus φ, wobei dieser definiert ist durch $\varphi: R \to R$, $r \mapsto r^p$. Peskine und Szpiro haben in ihrer Arbeit [PS73] diesen Homomorphismus weiter verallgemeinert zum sogenannten Frobeniusfunktor

$$\mathcal{F}: R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod},$$

der wie folgt definiert ist. Für einen gegebenen R-Modul M sei $\mathcal{F}(M) := R^\varphi \otimes_R M$, wobei R^φ der R-Bimodul ist, dessen zugrundeliegende additive Gruppe gerade R ist, dessen Links-R-Modulstruktur die gewöhnliche Multiplikation in R ist und der seine Rechts-R-Modulstruktur durch den Frobeniushomomorphismus erhält. Es gilt also $s \cdot r := r^p \cdot s$ für $s \in R^\varphi$ und $r \in R$. Da R regulär und lokal ist, impliziert ein Satz von Kunz in [Kun69] (siehe Satz 4.3.1), dass $\mathcal{F}$ ein exakter Funktor ist und somit viele gute Eigenschaften besitzt. Nun konnte gezeigt werden, dass die lokalen Kohomologiemoduln für ein Ideal $I \subseteq R$, also die Moduln $H_I^i(R)$, die folgenden zwei wichtigen Eigenschaften besitzen:

(i) $H_I^i(R) \cong \mathcal{F}(H_I^i(R))$

(ii) $H_I^i(R) = \varinjlim \mathcal{F}^t(Ext_R^i(R/I, R))$.

Außerdem ist $Ext_R^0(R/I, R)$ und somit der erste Term im direkten Limes endlich erzeugt. Diese beiden Tatsachen waren es, die es Huneke und Sharp in [HS93] ermöglichten den obigen Satz über die Endlichkeit der Bass-Zahlen und der assoziierten Primideale von bestimmten lokalen Kohomologiemoduln über einem regulären Ring R zu beweisen.

Gennady Lyubeznik griff in seiner Arbeit [Lyu97] diese beiden Eigenschaften ebenfalls auf und verallgemeinerte diese zu der folgenden Definition.

Definition 1.3 (Definition 3.2.1/Definition 3.2.4). *Sei R ein kommutativer noetherscher regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei $\mathcal{M}$ ein R-Modul.*

*(i) $\mathcal{M}$ heißt **$\mathcal{F}$-Modul**, falls ein R-Modul Isomorphismus*

$$\theta: \mathcal{M} \to \mathcal{F}(\mathcal{M}) = R^\varphi \otimes_R \mathcal{M}$$

existiert. Dieser heißt dann auch Strukturmorphismus von $\mathcal{M}$.

(ii) Ein $\mathcal{F}$-Modul $\mathcal{M}$ heißt ***$\mathcal{F}$-endlich****, falls*

$$\mathcal{M} = \varinjlim(M \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\beta)} \mathcal{F}^2(M) \xrightarrow{\mathcal{F}^2(\beta)} \mathcal{F}^3(M) \xrightarrow{\mathcal{F}^3(\beta)} \dots)$$

mit einem endlich erzeugten R-Modul M und einem R-Modulhomomorphismus $\beta : M \to \mathcal{F}(M)$ gilt.

Nun ist mit den obigen Beobachtungen klar, dass diese Definitionen gerade passend gewählt wurden, um zu erreichen, dass die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(R)$ $\mathcal{F}$-Moduln und sogar $\mathcal{F}$-endlich sind. Lyubeznik konnte in [Lyu97] auch zeigen, dass $\mathcal{F}$-endliche Moduln im Fall eines regulären Ringes positiver Charakteristik stets endliche Bass-Zahlen und endlich viele assoziierte Primideale besitzen und somit das Ergebnis von Huneke und Sharp wie folgt verallgemeinern.

Satz 1.4 (Satz 3.4.6/Satz 3.4.5)**.** *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein regulärer Ring der Charakteristik $p > 0$, und sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Sei außerdem $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ und $j \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$:*

(i) Es gilt $\mu^i(\mathfrak{p}, M) \leq \infty$, M besitzt also endliche Bass-Zahlen.

(ii) Die Menge der assoziierten Primideale von M, also $Ass(M)$, ist endlich.

Eine wichtige Frage in der algebraischen Geometrie ist es, zu entscheiden wieviele Gleichungen nötig sind, um eine gegebene algebraische Menge mengentheoretisch zu beschreiben. Dabei hat sich herausgestellt, dass die lokalen Kohomologiemoduln "Informationen" enthalten, um diese Frage zu beantworten. Ein wichtiges Konzept sind dabei die sogenannten mengentheoretisch vollständigen Durchschnitte. Dabei handelt es sich grob gesagt um algebraische Varietäten V (im affinen oder projektiven Raum über einem Körper $\Bbbk$), die durch $codim(V)$ viele Gleichungen ausgeschnitten werden können. Im Allgemeinen wird die Anzahl der nötigen Gleichungen für eine durch ein Ideal I gegebene Varität als arithmetischer Rang des Ideals bezeichnet. Dabei ist dieser definiert als:

$$ara(I) := min\{k \in \mathbb{Z} \mid \exists f_1, \dots, f_k \in R : \sqrt{I} = \sqrt{f_1, \dots, f_k}\},$$

und es gilt in diesem Fall, dass die Kodimension von V, $codim(V)$, gerade gleich der Höhe des definierenden Ideals I ist. Diese bezeichnet man als $height(I)$. Es wird sich herausstellen, dass ein enger Zusammenhang zwischen dem arithmetischen Rang eines Ideals und regulären Folgen auf den Matlis-Dualen bestimmter lokaler Kohomologiemoduln besteht. Zunächst einmal besteht aber der folgende Zusammenhang mit dem Verschwinden gewisser lokaler Kohomologiemoduln.

Bemerkung 1.5 (siehe Bemerkung 5.4)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$, einen R-Modul M und ein Ideal $I \subseteq R$ gilt:*

(i) $ara(I) \leq n \Rightarrow H_I^k(M) = 0 \quad \forall k > n$.

(ii) $ara(I) \geq n \Leftarrow H_I^n(M) \neq 0$.

Das Verschwinden bzw. das Nichtverschwinden von lokalen Kohomologiemoduln liefert uns also Informationen über die Anzahl von Elementen, die benötigt werden, um ein Ideal – bis auf Radikal – zu erzeugen. Geometrisch erhalten wir also Aussagen über die Anzahl der nötigen Gleichungen, um eine gegebene Varietät zu beschreiben. Allerdings reicht das Verschwinden allein nicht aus, um den arithmetischen Rang zu bestimmen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 1.6 (Beispiel 5.5)**.** *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$, und bezeichne $\mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$ den n-dimensionalen projektiven Raum über $\mathbb{k}$. Betrachten wir dann die projektive, glatte Kurve C_d, definiert als das Bild unter der Abbildung*

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{k}},\ (u:v) \mapsto (u^d : u^{d-1}v : uv^{d-1} : v^d),$$

*so ist bekannt, dass C_3 mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt ist. Außerdem konnte gezeigt werden (siehe [Har79] oder auch in [BSR81]), dass im Fall $char\,\mathbb{k} > 0$ C_d für alle $d \geq 3$ mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt ist. Im Falle $char\,\mathbb{k} = 0$ ist diese Frage völlig offen, sogar für die Kurve C_4 ist ungeklärt, ob sie vollständiger Durchschnitt ist, oder nicht. C_4 ist die berühmte **Macaulay-Kurve**.*

Sei I das zu C_4 gehörige Ideal, so weiß man, dass Elemente $f, g, h \in R$ existieren mit $\sqrt{I} = \sqrt{f, g, h}$. und I ist Primideal der Höhe 2. Es stellt sich also die Frage, ob auch $ara(I) = 2$ gilt. Diese Frage kann sofort negativ beantwortet werden, falls $H^3_I(R) \neq 0$ gilt, wie Bemerkung 1.5 zeigt. Man weiß aber, dass $H^3_I(R) = 0$ gilt und somit lässt sich keine genaue Aussage treffen. Die Frage ist bis jetzt in Charakteristik Null noch unbeantwortet.

Betrachtet man andererseits I/fR als Ideal von R/fR so gilt einerseits $height(I) = 1$ und $H^l_{I/fR}(R/fR) = 0\,\forall l > 1$. Andererseits kann man zeigen, dass $ara(I/fR) \geq 2$ gilt. Die Frage ist in diesem Fall also beantwortet und das Ideal ist trotz des Verschwindens der Kohomologie kein mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.

Das Verschwinden bzw. das Nichtverschwinden der lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(R)$ liefert uns also noch nicht genügend Informationen, um diese Frage für die Kurve C_4 beantworten zu können. Allerdings hat sich durch den folgenden Satz von Hellus aus [Hel07b] gezeigt, dass das Matlis-Dual des zweiten lokalen Kohomologiemoduls, also der Moduln $D(H^2_I(R))$, die nötige Information enthält, und zwar in folgendem Sinne.

Satz 1.7 (Satz 5.7)**.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring, $I \subsetneq R$ ein echtes Ideal von R, $h \in \mathbb{N}$ und sei $\underline{f} = f_1, \ldots, f_h \in I$ eine R-reguläre Folge. Dann sind äquivalent:*

(i) $\sqrt{\underline{f}R} = \sqrt{I}$*, insbesondere ist I mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.*

(ii) $H^l_I(R) = 0$ *für alle $l > h$ und die Folge $\underline{f}$ ist quasi-regulär auf $D(H^h_I(R))$.*

(iii) $H^l_I(R) = 0$ *für alle $l > h$ und die Folge $\underline{f}$ ist regulär auf $D(H^h_I(R))$.*

(iv) $H^l_I(R) = 0$ *für alle $l > h$ und die Folge $\underline{f}$ ist filter-regulär auf $D(H^h_I(R))$.*

Dabei sei für einen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ der R-Modul $E := E(R/\mathfrak{m})$ die injektive Hülle des Residuenkörpers $R/\mathfrak{m}$. Für einen gegebenen R-Modul M heißt dann der Modul $D(M) := Hom_R(M, E)$ ***Matlis-Dual*** von M.

Damit haben wir also die folgende Implikation, wobei I das zu C_4 gehörige Ideal bezeichnet:

$$\left\{\begin{matrix} \exists \text{ R-reguläre Folge } f, g \in I : \\ f, g \text{ reguläre Folge auf } D(H^2_I(R)) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} C_4 \text{ ist mengentheoretisch} \\ \text{vollständiger Durchschnitt} \end{matrix}\right\}$$

Dabei heißt eine Folge $\underline{f} = f_1, \dots, f_h \in R$ R-regulär, falls $\underline{f}R \neq R$ gilt und falls $\forall\, 1 \leq i \leq h$ gilt, dass f_i injektiv auf $R/(f_1, \dots, f_{i-1})$ operiert und somit Nichtnullteiler auf diesem Quotienten ist. Es gilt in diesem Fall immer $height((\underline{f}R)) = h$, d.h. reguläre Folgen erzeugen immer mengentheoretisch vollständige Durchschnitte.

Dies motiviert also unser Interesse an den Nichtnullteilern von $D(H_I^i(R))$ und damit auch das Interesse an den assoziierten Primidealen von $D(H_I^i(R))$. Wir haben nämlich für einen noetherschen Ring R und einen R-Modul M die folgende Gleichheit, wobei $Ass\, M$ die Menge der assoziierten Primideale von M bezeichnet:

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass\, M} = \{\text{Nullteiler von } M\}.$$

Im Hinblick auf die von Lyubeznik in [Lyu97] gemachte Beobachtung (siehe Satz 3.4.5), dass jeder $\mathcal{F}$-endliche Modul nur endlich viele assoziierte Primideale besitzt, stellt sich also auf natürliche Weise die Frage, ob auch die Matlis-Duale lokaler Kohomologiemoduln $\mathcal{F}$-Moduln sind und ob sie darüber hinaus vielleicht sogar $\mathcal{F}$-endlich sind.

Die Beantwortung dieser Frage ist der Hauptgegenstand dieser Arbeit und wir werden zeigen, dass für den Fall eines Potentreihenringes R in endlich vielen Unbekannten über einem perfekten Körper $\Bbbk$ die Moduln $D(H_I^i(R))$ eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur besitzen.Wir werden also in der Lage sein, den folgenden Satz zu formulieren.

Korollar 1.8 (Korollar 4.5.3/Korollar 4.5.4). *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält und sei M ein $\mathcal{F}$-Modul. Sei außerdem $I \subset R$ ein Ideal und $i \in \mathbb{N}$. Dann besitzen die Matlis-Duale $D(H_I^i(M))$ eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur, insbesondere ist $D(H_I^i(R))$ ein $\mathcal{F}$-Modul.*

Dabei befinden wir uns wegen eines Struktursatzes von Cohen (siehe Satz 4.3.9) gerade in der angesprochenen Situation eines Potenzreihenringes. Die Frage nach der $\mathcal{F}$-Endlichkeit dieser Matlis-Duale muss im Allgemeinen aber negativ beantwortet werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.9 (Korollar 5.1.4). *Sei $R = \Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$ ein Potenzreihenring in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ über dem Körper $\Bbbk$, $i < n$, und sei I das Ideal $(X_1, \dots, X_i)R$. Dann ist die Menge*

$$Ass_R(D(H^i_{(X_1,\dots,X_i)}(R)))$$

unendlich.

Wir werden in dieser Arbeit also zeigen können, dass die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ über einem Potenzreihenring $R = \Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$ über einem perfekten Körper $\Bbbk$ der Charakteristik $p > 0$ $\mathcal{F}$-Moduln sind, aber im Allgemeinen Beispiele für $\mathcal{F}$-Moduln liefern, welche nicht $\mathcal{F}$-endlich sind.

Die Aufgabenstellung wurde dabei hauptsächlich durch die Untersuchungen von Hellus in [Hel07b] motiviert, wo gezeigt werden konnte, dass über einem Potenzreihenring über einem Körper der Charakteristik Null eine ganz ähnliche Situation vorliegt. Genauer wurde dort das Folgende bewiesen.

Satz 1.10 (Satz 6.2.1/Korollar 6.3.2). *Sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null und sei R der Potenzreihenring über $\Bbbk$ in n Variablen, also $R = \Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$. Sei außerdem $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Dann sind die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ auf kanonische Weise (Links-)$\mathcal{D}$-Moduln. Sie liefern aber im Allgemeinen Beispiele für nicht-holonome $\mathcal{D}$-Moduln.*

Dieses Resultat, welches eine gewisse Analogie zwischen $\mathcal{F}$-Moduln in positiver Charakteristik und $\mathcal{D}$-Moduln in Charakteristik Null aufzeigt, führt also zu der Frage nach dem Zusammenhang zwischen diesen beiden Strukturen. Dabei ist ein $\mathcal{D}$-Modul ein Modul über dem Ring der Differentiale $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$ für einen Körper $\Bbbk$ und eine gegebene kommutative $\Bbbk$-Algebra R. Grob gesagt handelt es sich dabei um den nichtkommutativen Unterring

$$\mathcal{D}(R; \Bbbk) \subseteq End_{\Bbbk}(R)$$

des Ringes der $\Bbbk$-linearen Endomorphismen auf R, welcher von den Abbildungen, die durch die Multiplikation mit Elementen aus R definiert sind, und sämtlichen $\Bbbk$-linearen Derivationen auf R erzeugt wird. Die ursprüngliche Motivation für die Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln war es, einen algebraischen Zugang für die Untersuchung von Systemen partieller Differentialgleichungen zu erhalten. Darüber hinaus fanden sich Anwendungen vor allem in der mathematischen Physik oder in der Darstellungstheorie. Als Standardreferenzen für die Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln seien an dieser Stelle die Bücher [Bj9] und [Cou95] genannt.

Nun hat Lyubeznik in seiner Arbeit [Lyu93] erkannt, dass sich diese Theorie auch in der Untersuchung von lokalen Kohomologiemoduln anwenden lässt und die $\mathcal{D}$-Moduln hielten somit Einzug in das Gebiet der kommutativen Algebra. Insbesondere die schon erwähnten Endlichkeitsbedingungen ließen sich auf diese Art und Weise untersuchen, wie folgender Satz zeigt. Für die Notation der holonomen $\mathcal{D}$-Moduln sei auf Abschnitt 6.1 verwiesen.

Satz 1.11 (Satz 6.3.1). *Sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null, $R = \Bbbk[[X_1, \dots . X_n]]$ ein Potenzreihenring über $\Bbbk$ in n Variablen und sei M ein $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$-Modul. Dann gilt:*

(i) Ist M endlich erzeugt, so ist die Menge $\operatorname{Ass} M$, also die Menge der assoziierten Primideale von M, endlich.

(ii) Falls M holonom ist, so sind alle Bass-Zahlen von M endlich.

In weiteren Untersuchungen hat sich gezeigt, dass sich $\mathcal{F}$-Moduln und $\mathcal{D}$-Moduln auch dazu eignen, algorithmische Fragen über die lokalen Kohomologiemoduln zu beantworten. Im Allgemeinen ist es sehr schwierig diese Moduln zu berechnen und somit ist es auch ein sehr schwieriges Problem zu entscheiden ob, $H_I^i(M) = 0$ gilt, für einen gegebenen lokalen Kohomologiemodul. Im Fall eines Polynomringes ist die Situation ein wenig besser und die einzig dort bekannten Algorithmen basieren in Charakteristik Null auf $\mathcal{D}$-Moduln (siehe [Wal99]) und in positiver Charakteristik auf dem Frobeniushomomorphismus (siehe Satz 4.8.7).

Wie wir sehen, gelten also in Charakteristik Null für einen Potenzreihenring $R = \Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$ über einem Körper $\Bbbk$ und einen holonomen $\mathcal{D}$-Modul M ganz analoge Bedingungen wie für einen $\mathcal{F}$-endlichen Modul in positiver Charakteristik. Genauere Betrachtungen zeigen, dass auch in positiver Charakteristik Ringe von Differentialen und somit auch $\mathcal{D}$-Moduln definiert werden können.

Dabei wird sich herausstellen, dass sich der Ring $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ für einen perfekten Körper $\Bbbk$ positiver Charakteristik und eine $\Bbbk$-Algebra, die endlich erzeugt über R^p ist, wie folgt beschreiben lässt.

$$\mathcal{D}(R;\Bbbk) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} End_{R^{p^n}}(R).$$

Die R^{p^n}-linearen Endomorphismen von R lassen sich also auch als Endomorphismen des R-Rechtsmoduls R^{φ^n} auffassen und wir erhalten somit den folgenden Zusammenhang zwischen $\mathcal{F}$- und $\mathcal{D}$-Moduln in positiver Charakteristik (die Details dieser Konstruktion finden sich ausführlich in Kapitel 7).

Satz 1.12 (Satz 7.2.5)**.** *Sei (M,θ) ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann induziert die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur, die durch θ gegeben ist, eine natürliche $\mathcal{D}$-Modul-Struktur auf M.*

Insbesondere ist es uns damit in der vorliegenden Arbeit gelungen das Ergebnis von Hellus aus [Hel07b] über die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur der Matlis-Duale $D(H^i_I(R))$ im Fall eines Potenzreihenringes R über einem Körper der Charakteristik Null auch auf den Fall positiver Charaktersitik zu verallgemeinern.

Korollar 1.13 (Satz 7.3.1)**.** *Sei $\Bbbk$ ein perfekter Körper und sei $R = [[X_1,\ldots,X_n]]$ der Potenzreihenring über $\Bbbk$ in n Unbestimmten. Sei außerdem $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Dann sind die Matlis-Duale $D(H^i_I(R))$ auf natürliche Weise (Links-)$\mathcal{D}$-Moduln.*

Aufbau der Arbeit

Im Anschluss an die Einleitung werden wir in Kapitel 2 mit einer Einführung in die lokale Kohomologietheorie beginnen. Wir werden dabei verschiedene Möglichkeiten der Definition der lokalen Kohomologiemoduln kennenlernen und erste Anwendungen diskutieren. Hauptreferenz für diesen Abschnitt ist das schöne Buch "Twenty-Four Hours of Local Cohomology" von Iyengar et al. [ea07]. Außerdem werden wir die Theorie der injektiven Moduln und der Matlis-Dualität behandeln. Dabei diente uns, außer dem schon erwähnten Buch, das unveröffentlichte Vorlesungsskript über Castelnuovo-Mumford-Regularität von Herrn Prof. Dr. Stückrad [St8] als Grundlage.

Gegenstand von Kapitel 3 wird die Theorie der $\mathcal{F}$-Moduln sein. Dabei werden wir uns eng an der Arbeit von Lyubeznik [Lyu97] orientieren, in welcher die $\mathcal{F}$-Moduln erstmals erwähnt wurden. Insbesondere wird der Begriff der $\mathcal{F}$-endlichen Moduln entwickelt und ihre Eigenschaften werden untersucht. Für die von uns verwendete Terminologie der Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln orientieren wir uns an der Notation eines $R[F]$-Moduls, wie sie von Blickle in seiner Dissertation [Bli01] verwendet wurde.

Im dann folgenden Kapitel 4 werden wir uns das Hauptergebnis dieser Arbeit, also die $\mathcal{F}$-Modulstruktur der Matlis-Duale $D(H^i_I(R))$, erarbeiten. Wir werden dabei mit Hilfe eines Struktursatzes von Cohen über komplette reguläre lokale Ringe und einem Satz von Kunz über die Charakterisierung regulärer lokaler Ringe die Freiheit von R^φ über R zeigen. Daraus können wir dann unser Hauptresultat ableiten. Für nötige Grundlagen aus der kommutativen Algebra, speziell über Komplettierungen, orientieren wir uns an dem Vorlesungsskript von Herrn Dr. Hellus [Hel09a].

Kapitel 5 beschäftigt sich speziell mit den assoziierten Primidealen der Moduln $D(H_I^i(R))$, den sogenannten koassoziierten Primidealen der lokalen Kohomologie. Insbesondere zeigt sich, dass die Menge $Ass\, D(H_I^i(R))$ im Allgemeinen unendlich ist und die Matlis-Duale somit nicht $\mathcal{F}$-endlich sind. Im Anschluss werden wir kurz darlegen, wie Hellus und Stückrad dieses Ergebnis nutzen konnten, um in [HS09] ein Beispiel von Hartshorne ([Har70, §3]) zu verallgemeinern. Den Abschluss bildet eine Vermutung über die allgemeine Struktur der Menge $Ass\, D(H_I^i(R))$, die von Hellus in [Hel05b] formuliert wurde.

Unser Interesse an der $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der Matlis-Duale wurde motiviert durch die Feststellung, dass die Moduln $D(H_I^i(R))$ in Charakteristik Null eine kanonische $\mathcal{D}$-Modul-Struktur tragen. Dies wurde von Hellus in seiner Habilitationsschrift [Hel07b] gezeigt und soll an dieser Stelle, also in Kapitel 6, als Analogon unserer Ergebnisse in positiver Charakteristik präsentiert werden. Insbesondere zeigt sich dort, dass die Matlis-Duale im Allgemeinen keine holonomen $\mathcal{D}$-Moduln sind.

In Charakteristik $p > 0$ lassen sich auch Ringe von Differentialoperatoren und damit $\mathcal{D}$-Moduln definieren. Dies ist der Inhalt von Kapitel 7 und wir folgen bei unserer Darstellung hauptsächlich Blickle in [Bli03] und [Bli01]. Es wird sich herausstellen, dass eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur auf natürliche Weise auch eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur liefert. Dies zeigt, in Kombination mit unserem Hauptresultat aus Kapitel 4, dass die Moduln $D(H_I^i(R))$ auch in positiver Charakteristik $\mathcal{D}$-Moduln sind, was das Ergebnis von Hellus aus Kapitel 6 verallgemeinert.

Zum Ende dieser Arbeit liefert Kapitel 8 noch einen kurzen Ausblick über offen gebliebene Fragen und mögliche weitere Forschungsansätze zu der bearbeiteten Thematik.

Notationen und Vereinbarungen

- In dieser Arbeit bezeichnet R durchgehend einen nichtrivialen kommutativen noetherschen Ring mit 1 und $I \subset R$ ein Ideal von R. Einen R-Modul bezeichnen wir gewöhnlich mit M. Besitzt der Ring R weitere Attribute, ist er beispielsweise zusätzlich regulär, so wird dies gekennzeichnet.
- Die Notation $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ wird verwendet, um einen lokalen Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und zugehörigem Residuenkörper $\Bbbk := R/\mathfrak{m}$ zu notieren. Auch außerhalb dieser Terminologie bezeichnet $\Bbbk$ immer einen Körper.
- Wenn wir von einem Ring R positiver Charakteristik sprechen, so meinen wir damit immer $char\, R = p > 0$ mit einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$. Wir befassen uns also ausschließlich mit dem gleichcharakteristischen Fall (siehe Definition 4.3.4).
- Wir verwenden ferner die folgenden Bezeichnungen für aufretende Kategorien:
  - R-mod bezeichnet die Kategorie der R-Moduln.
  - $\mathcal{F}$-mod bezeichnet die Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln und mit $\mathcal{F}_{finite}$ bezeichnen wir die Unterkategorie der $\mathcal{F}$-endlichen Moduln (siehe Kapitel 3).

- ◦ $\mathcal{QF}$-mod bezeichnet die Kategorie der Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln und mit $\mathcal{QF}_{cofinite}$ bezeichnen wir die Unterkategorie der artinschen Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln (siehe Kapitel 3).
- ◦ $\mathcal{D}$-mod bezeichnet die Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln, also die Kategorie der Linksmoduln über dem Ring der Differentiale $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ für einen Körper $\Bbbk$ und eine kommutative $\Bbbk$-Algebra R (siehe Kapitel 6).

- Wir verwenden das Symbol $\mathbb{Z}$ um den Ring der ganzen Zahlen und $\mathbb{N}$ (respektive $\mathbb{N}_+$) um die Menge der nicht-negativen (respektive positiven) ganzen Zahlen zu bezeichnen.
- Wir notieren Komplexe $K^\bullet$ von R-Moduln kohomologisch, d.h. sie haben stets die Gestalt

$$\ldots \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{\partial_K^{i-1}} K^i \xrightarrow{\partial_K^i} K^{i+1} \longrightarrow \ldots .$$

- Es wurde in vielen Fällen darauf verzichtet Beweise wiederzugeben, insbesondere falls diese für das Verständnis der Arbeit nicht nötig sind. Die fehlenden Inhalte können in den Literaturhinweisen nachgeschlagen werden, welche jeweils in eckigen Klammern '[...]' angegeben sind.

Kapitel 2

Lokale Kohomologie und Matlis-Dualität

Die lokalen Kohomologiemoduln wurden zuerst von Grothendieck Anfang der 60er Jahre zur Untersuchung von Garben auf projektiven Varietäten eingeführt. Dabei wurden zuerst geometrisch lokale Kohomologie-Gruppen einer Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X, bezüglich einer lokal abgeschlossenen Teilmenge Y, als die rechtsabgeleiteten Funktoren des globalen Schnitt-Funktors $\Gamma_Y(\mathcal{F})$, mit Support in Y, eingeführt. Einzelheiten zu dieser geometrischen Motivation und Definition finden sich in [Gro67]. Algebraisch spezialisiert sich diese Definition zu rechtsabgeleiteten Funktoren des Torsions-Funktors $\Gamma_I(M)$ eines Moduls M bezüglich eines Ideals I.

2.1 Lokale Kohomologie

Wir beginnen jetzt mit der Einführung der lokalen Kohomologie-Funktoren. Dabei wird sich herausstellen, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, diese Funktoren zu definieren. Wir beginnen mit der Definition der lokalen Kohomologie als abgeleiteter Funktor und werden danach noch weitere Möglichkeiten der Definition kennenlernen, welche aber alle dasselbe Ergebnis liefern.

Sei im Folgenden R ein noetherscher kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal.

2.1.1 H_I^i als Rechtsableitung des Torsions-Funktors Γ_I

Wir beginnen jetzt mit der Einführung der lokalen Kohomologie-Funktoren als die rechtabgeleiteten Funktoren des linksexakten kovarianten Torsions-Funktors Γ_I.

Definition 2.1.1. *Für einen R-Modul M, setzen wir*

$$\Gamma_I(M) = \{m \in M \mid I^t m = 0 \textit{ für ein } t \in \mathbb{N}\}.$$

Wir untersuchen nun einige Eigenschaften von Γ_I. Insbesondere werden wir sehen, dass die Zuordnung

$$M \longrightarrow \Gamma_I(M)$$

einen kovarianten und linksexakten Funktor in der Kategorie der R-Moduln induziert.

Satz 2.1.2. *Für einen R-Modul M gilt:*

(i) $\Gamma_I(M)$ *ist ein Untermodul von* M.

(ii) Γ_I *ist ein kovarianter, linksexakter Funktor in der Kategorie der R-Moduln.*

Beweis. Die Untermoduleigenschaft ist offensichtich und (ii) folgt z.B. aus [BH98, Lemma 1.1.6]. □

Wir bezeichnen Γ_I auch als Torsions-Funktor bezüglich des Ideals I oder auch als I-Torsions-Funktor. Falls für einen R-Modul M $\Gamma_I(M) = M$ gilt, so nennen wir M auch I-Torsionsmodul. Die Linksexaktheit des Torsions-Funktors motiviert nun die Untersuchung seiner rechtsabgeleiteten Funktoren $R^i\Gamma_I$. Diese werden wir nun kennenlernen.

Definition 2.1.3 (injektiver Modul)**.** *Ein R-Modul E heißt* ***injektiv****, falls der Funktor* $Hom_R(-, E)$ *exakt ist.*

Definition 2.1.4 (injektive Auflösung)**.** *Eine* ***injektive Auflösung*** *eines R-Moduls M ist ein Komplex* $E^\bullet$ *von injektiven R-Moduln*

$$0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow E^3 \longrightarrow \ldots,$$

zusammen mit einem R-Modulhomomorphismus $\iota : M \to E^0$, *so dass der Komplex*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow E^3 \longrightarrow \ldots$$

exakt ist.

Definition 2.1.5 (abgeleiteter Funktor)**.** *Sei F ein linksexakter additiver kovarianter Funktor in der Kategorie der R-Moduln und sei M ein R-Modul. Sei außerdem* $E^\bullet$ *eine injektive Auflösung von M, dann setzen wir:*

$$R^iF(M) = H^i(F(E^\bullet)) \qquad \text{für } i \geq 0.$$

Dabei sind die Moduln $R^iF(M)$ *bis auf kanonische Isomorphie unabhängig von der gewählten injektiven Auflösung, da injektive Auflösungen eindeutig sind bis auf Homotopie (siehe z.B. [ea07, 3.18]) und additive Funktoren solche erhalten. Wir nennen den Funktor* R^iF *den* ***i-ten rechtsabgeleiteten Funktor*** *von F.*

Bemerkung 2.1.6 (siehe 3.21 in [ea07])**.** *Sei F ein linksexakter kovarianter additiver Funktor. Dann gilt:*

(i) Ein gegebener Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ *induziert eine Familie* $\{R^iF(f)\}_{i\geq 0}$ *von Homomorphismen* $R^iF(f) : R^iF(M) \longrightarrow R^iF(N)$.

(ii) Da F links-exakt ist gilt: $R^0F = F$.

(iii) Für jede kurze exakte Folge von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

gibt es einen Verbindungshomomorphismus δ^i *und eine lange exakte Folge*

$$\ldots \longrightarrow R^iF(M') \longrightarrow R^iF(M) \longrightarrow R^iF(M'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(M') \longrightarrow \ldots.$$

Wir können in (iii) der letzten Bemerkung gut erkennen, welche Informationen die abgeleiteten Funktoren enthalten. Starten wir mit einem links-exakten Funktor F und einer kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

so ist die Folge

$$0 \longrightarrow F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'')$$

wieder exakt. Wir dürfen aber im Allgemeinen rechts nicht durch Null ergänzen, da ein links-exakter Funktor im Allgemeinen keine Surjektionen erhält. Nun können wir nach Bemerkung 2.1.6 (ii) und (iii) diese Folge aber durch die Anwendung der abgeleiteten Funktoren so ergänzen, dass sie exakt bleibt. Wir erhalten die Folge

$$0 \longrightarrow F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'') \xrightarrow{\delta^0} R^1F(M') \longrightarrow R^1F(M) \longrightarrow \dots$$

und sehen so, dass die abgeleiteten Funktoren, insbesondere der Funktor R^1F, die Information enthält, ob ein gegebener links-exakter Funktor F sogar exakt ist oder nicht. Damit können wir also schon bekannte Eigenschaften, die über die Exaktheit von gewissen Funktoren definiert sind, neu formulieren.

Satz 2.1.7. *Sei M R-Modul. Dann gilt:*

(i) M ist genau dann injektiv, wenn $Ext^i_R(-, M) = 0$ für alle $i \geq 1$ gilt, also genau dann, wenn $Ext^1_R(-, M) = 0$.

(ii) M ist genau dann projektiv, wenn $Ext^i_R(M, -) = 0$ für alle $i \geq 1$ gilt, also genau dann, wenn $Ext^1_R(M, -) = 0$.

(iii) M ist genau dann flach, wenn $Tor^i_R(-, M) = 0$ für alle $i \geq 1$ gilt, und das gilt also genau dann, wenn $Tor^1_R(-, M) = 0$.

Beweis. [ea07, Theorem 3.26]. □

Definition 2.1.8 (lokale Kohomologie). *Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Die rechts-abgeleiteten Funktoren des Torsions-Funktors Γ_I, also die Funktoren $R^i\Gamma_I$, nennt man **lokale Kohomologie-Funktoren** bzgl. I und bezeichnet Sie mit H^i_I (**i-te lokale Kohomologie** bzgl I, $i \geq 0$).*

Wir kommen nun zu den ersten einfachen Eigenschaften der lokalen Kohomologiemoduln.

Satz 2.1.9. *Sei M ein R-Modul und $I, J \subseteq R$ seien Ideale von R. Dann gilt:*

(i) Es gilt $H^0_I(M) = \Gamma_I(M)$, und $H^j_I(M)$ ist I-Torsion für jedes j.

(ii) Falls $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, dann ist $H^i_I(M) \cong H^i_J(M)$ für jedes i.

(iii) Sei $\{M_\lambda\}$ eine Familie von R-Moduln. Dann gilt für jedes i:

$$H^i_I(\bigoplus_\lambda M_\lambda) \cong \bigoplus_\lambda H^i_I(M_\lambda).$$

(iv) Eine kurze exakte Folge von R-Moduln $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ induziert eine lange exakte Folge der lokalen Kohomologiemoduln

$$\ldots \longrightarrow H_I^{i-1}(M'') \longrightarrow H_I^i(M') \longrightarrow H_I^i(M) \longrightarrow H_I^i(M'') \longrightarrow H_I^{i+1}(M') \longrightarrow \ldots.$$

Beweis. [ea07, Proposition 7.3]. □

2.1.2 H_I^i als direkter Limes von Ext-Funktoren

Wir wollen jetzt eine weitere Methode beschreiben, um die lokalen Kohomologiemoduln zu definieren bzw. zu berechnen. Es stellt sich nämlich heraus, dass die Moduln H_I^i als direkter Limes von gewissen Ext-Funktoren beschrieben werden können. Bei den Ext-Funktoren handelt es sich um die abgeleiteten Funktoren des Hom-Funktors. Beginnen wir also mit der Einführung dieser Funktoren.

Definition 2.1.10 (Ext-Funktoren)**.** *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Die rechtsabgeleiteten Funktoren des kovarianten Hom-Funktors $Hom_R(M,-)$, also die Funktoren $R^iHom_R(M,-)$, nennt man* ***Ext-Funktoren*** *und bezeichnet Sie mit $Ext_R^i(M,-)$ für $i \geq 0$.*

Alternativ zu dieser Definiton kann man auch den kontravarianten Funktor $Hom_R(-,N)$ für einen R-Modul N verwenden, um die Ext-Funktoren einzuführen. Dieser Funktor ist wiederum links-exakt, allerdings benötigt man zur Berechnung der Rechtsableitungen dann projektive statt injektive Auflösungen. Es stellt sich allerdings heraus, dass beide Ansätze das gleiche Ergebnis liefern. Genauer gilt: Sei $P_\bullet$ eine projektive Auflösung von M und $E^\bullet$ eine injektive Auflösung von N mit zugehöriger Projektion $\epsilon : P_\bullet \to M$ bzw. zugehöriger Injektion $\iota : N \to E^\bullet$, dann sind die folgenden induzierten Komplexmorphismen, sogar Quasi-Isomorphismen. Sie induzieren also auf Kohomologie-Niveau sogar Isomorphismen.

$$Hom_R(P_\bullet, N) \xrightarrow{Hom_R(P_\bullet,\iota)} Hom_R(P_\bullet, E^\bullet) \xleftarrow{Hom_R(\epsilon,E^\bullet)} Hom_R(M, E^\bullet).$$

Und damit also auf Kohomologie-Niveau:

$$\begin{aligned} Ext_R^i(M,N) &= R^iHom_R(M,N) \\ &= H^i(Hom_R(P_\bullet, N)) \\ &\cong H^i(Hom_R(P_\bullet, E^\bullet)) \\ &\cong H^i(Hom_R(M, E^\bullet)) \\ &= R^iHom_R(M,N) = Ext_R^i(M,N) \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt einen Zusammenhang herstellen zwischen dem lokalen Kohomologie-Funktor und gewissen Ext-Funktoren. Da der erste Funktor als Rechtsableitung des Torsions-Funktors Γ_I definiert wurde und der Zweite als Rechtsableitung des Hom-Funktors definiert werden kann, betrachten wir zu Beginn den folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Funktoren Γ_I und $Hom_R(R/I^t,-)$. Für jeden R-Modul E und für $t \in \mathbb{N}$ haben wir eine funktorielle Identifikation

$$\begin{aligned} Hom_R(R/I^t, E) &\xrightarrow{\cong} \{x \in E \mid I^t x = 0\} \subseteq \Gamma_I(E), \\ f &\longmapsto f(1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Identifikation, können wir das direkte System

$$Hom_R(R/I, E) \subseteq \cdots \subseteq Hom_R(R/I^t, E) \subseteq Hom_R(R/I^{t+1}, E) \subseteq \ldots$$

von Untermoduln von $\Gamma_I(E)$ bilden. Nun ist leicht zu sehen, dass für den Limes dieses direkten Systems folgendes gilt

$$\varinjlim_t Hom_R(R/I^t, E) = \Gamma_I(E).$$

Sei nun $E^\bullet$ eine injektive Auflösung von M. Dann gilt wegen der Funktorialität der obigen Konstruktion auch

$$\varinjlim_t Hom_R(R/I^t, E^\bullet) = \Gamma_I(E^\bullet).$$

Da der Kohomologie-Funktor mit filtrierenden Kolimites kommutiert, ergibt sich aus der obigen Identifikation nun folgender Isomorphismus und damit auch der nachfolgende Satz

$$\varinjlim_t H^i(Hom_R(R/I^t, E^\bullet)) \cong H^i(\Gamma_I(E^\bullet)) = H^i_I(M).$$

Satz 2.1.11. *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Dann gilt für alle $i \geq 0$:*

$$H^i_I(M) \cong \varinjlim_t Ext^i_R(R/I^t, M).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus den oben gemachten Beobachtungen zusammen mit der Bemerkung, dass $H^i(Hom_R(R/I^t, E^\bullet))$ gerade die i-te Rechtsableitung des kovarianten Hom-Funktors $Hom_R(R/I^t, -)$ angewandt auf M ist und somit gilt

$$H^i(Hom_R(R/I^t, E^\bullet)) = Ext^i_R(R/I^t, M).$$

□

2.1.3 Koszul-Kohomologie und reguläre Folgen

Wir wollen nun eine weitere Möglichkeit vorstellen, wie die lokalen Kohomologiemoduln definiert werden können. Dazu werden wir gewisse Komplexe, die sogenannten Koszul-Komplexe, definieren und werden dann sehen, dass wir die lokale Kohomologie als direkten Limes gewisser Kohomologiemoduln solcher Komplexe beschreiben können. Zu Beginn benötigen wir aber erst die Konstruktion des Tensorproduktes zweier Komplexe.

Definition 2.1.12 (Tensorprodukt von Komplexen)**.** *Seien $K^\bullet$ und $L^\bullet$ Komplexe von R-Moduln. Dann ist ihr **Tensorprodukt** $K^\bullet \otimes_R L^\bullet$ der Komplex mit*

$$(K^\bullet \otimes_R L^\bullet)^n = \bigoplus_{i+j=n} K^i \otimes_R L^j,$$

und mit den R-linearen Randabbildungen, die auf den Elementartensoren $k \otimes l \in K^i \otimes_R L^j$ definiert sind durch

$$\partial(k \otimes l) = \partial_K(k) \otimes l + (-1)^i k \otimes \partial_L(l).$$

Für einen gegebenen Ring R und ein Element $x \in R$ betrachten wir nun den einfachsten Komplex, der diese beiden Informationen miteinander verbindet. Anschließend wird die Konstruktion von einem Ringelement auf endlich viele Ringelemente erweitert.

Definition 2.1.13 (Koszul-Komplex)**.** *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und sei $x \in R$ gegeben. Dann ist der* ***Koszul-Komplex*** *bzgl. x der Komplex*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \longrightarrow 0,$$

wobei sich R in den Graden -1 und 0 befindet. Wir bezeichnen ihn mit $K^\bullet(x; R)$. Sei nun $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ eine Folge von Elementen aus R, so bezeichnen wir den Komplex

$$K^\bullet(\boldsymbol{x}; R) = K^\bullet(x_1; R) \otimes_R \cdots \otimes_R K^\bullet(x_d, R)$$

als Koszul-Komplex bzgl. der Folge $\boldsymbol{x}$.

Der Koszul-Komplex enthält viele Informationen über das Ideal, das von den $x_1, \ldots, x_d$ erzeugt wird. Für wichtige Anwendungen benötigen wir aber noch weitere Informationen über den Einfluss und das Wirken dieses Ideals auf verschiedene R-Moduln. Zu diesem Zweck führen wir noch Koszul-Komplexe bzgl. eines R-Moduls M und die Koszul-Kohomologie ein.

Definition 2.1.14 (Koszul-Kohomologie)**.** *Sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ eine Folge von Elementen aus R und M ein R-Modul. Dann bezeichnen wir den Komplex*

$$K^\bullet(\boldsymbol{x}; M) = K^\bullet(\boldsymbol{x}; R) \otimes_R M$$

als ***Koszul-Komplex von M*** *bzgl.* $\boldsymbol{x}$*. Die* ***Koszul-Kohomologie von M*** *bzgl. $\boldsymbol{x}$ ist*

$$H^i(\boldsymbol{x}; M) = H^i(K^\bullet(\boldsymbol{x}; M)) \qquad \text{für } i \in \mathbb{Z}.$$

Nun stellt sich natürlich die Frage, welche Informationen der Koszul-Komplex enthält bzw. welche Informationen er uns für ein gegebenes Ideal $I = (x_1, \ldots, x_d)$ und einen R-Modul M liefern kann. Betrachten wir dazu das einfachste Beispiel.

Beispiel 2.1.15. *Sei x ein Element von R und M ein R-Modul. Dann hat der Koszul-Komplex von M bzgl. x, also der Komplex $K^\bullet(x; M)$,die Gestalt*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow 0$$

und somit gilt für die Koszul-Kohomologie

$$H^{-1}(x; M) = \{m \in M \mid xm = 0\} = (0 :_M x) \quad \text{und} \quad H^0(x; M) = M/xM.$$

Wir sehen also, dass $H^{-1}(x; M) = 0$ genau dann gilt, wenn x die Eigenschaft erfüllt, dass $xm \neq 0$ für alle Elemente $m \neq 0$ aus M gilt. Ist außerdem noch $xM = M$ so ist auch $H^0(x; M) = 0$. Diese Eigenschaften werden durch die folgenden Definitionen nun präzisiert.

Definition 2.1.16 (Nichtnullteiler)**.** *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Ein Element $x \in R$ heißt* ***Nichtnullteiler von M****, falls $xm \neq 0$ für alle $m \in M \backslash \{0\}$ gilt. Gilt zusätzlich noch $xM \neq M$, dann heißt das Element x* ***regulär auf M*** *oder auch* ***M-regulär****.*

Bemerkung 2.1.17. *Damit sehen wir also, dass in der Situation von Beispiel 2.1.15 das Element x genau dann Nichtnullteiler ist, wenn $H^{-1}(x; M) = 0$ gilt, und x ist sogar M-regulär, wenn darüber hinaus noch $H^0(x; M) \neq 0$ gilt.*

Wir sehen also, dass sich die Koszul-Kohomologie dazu eignet, zu entscheiden, ob ein gegebenes Ringelement Nichtnullteiler oder sogar M-regulär ist. Wir erweitern den Begriff der Regularität nun auf eine Folge von Ringelementen und stellen dann wieder die Frage, ob die Koszul-Kohomologie auch genügend Information enthält, um eine solche reguläre Folge zu charakterisieren.

Definition 2.1.18 (M-reguläre Folge). *Eine Folge $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ von Elementen von R heißt* ***reguläre Folge*** *bzgl. eines R-Moduls M oder auch* ***M-reguläre Folge*** *, falls:*

(i) x_1 ist M-regulär, und

(ii) x_i ist regulär auf $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ für jedes $i = 2, \ldots, d$.

Eine äquivalente Definition wäre es, zu fordern, dass für $1 \leq i \leq d$, das Element x_i ein Nichtnullteiler von $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ ist und dass $\boldsymbol{x}M \neq M$ gilt. Verzichtet man auf die Bedingung $\boldsymbol{x}M \neq M$ so erhält man die Definition einer ***quasi-regulären Folge****. Die R-regulären Folgen bezeichnen wir auch einfach als reguläre Folgen.*

Des Weiteren definieren wir nun die Tiefe eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq R$ auf einem endlich erzeugten R-Modul M, als maximale Länge einer in $\mathfrak{a}$ enthaltenden M-regulären Folge. Dabei ist diese Zahl wegen [St8, Definition 2.44] im Fall $M \neq \mathfrak{a}M$ wohldefiniert. Im Fall $M = \mathfrak{a}M$ sei diese als ∞ festgelegt.

Definition 2.1.19 ($\mathfrak{a}$-Tiefe). *Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann heißt die maximale Länge einer M-regulären Folge, welche in $\mathfrak{a}$ enthalten ist,* ***$\mathfrak{a}$-Tiefe von M*** *und wird mit $depth_R(\mathfrak{a}, M)$ bezeichnet.*

Definition 2.1.20 (Tiefe eines Moduls über einem lokalen Ring). *Ist $(R, \mathfrak{m})$ lokal und M ein R-Modul, so heißt $depth_R(M) = depth_R(\mathfrak{m}, M)$ auch einfach* ***Tiefe von M****.*

Betrachten wir nun nochmals den Koszul-Komplex eines Moduls bzgl. zweier Ringelemente x und y, also den Komplex $K^\bullet(x, y; M)$.

Beispiel 2.1.21. *Seien x, y Elemente des Ringes R und sei M ein R-Modul. Dann entsteht der Komplex $K^\bullet(x, y; M)$ durch Tensorieren der beiden Komplexe $K^\bullet(x; M)$ und $K^\bullet(y; M)$ und hat somit bis auf Isomorphie die Gestalt*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right]} M^2 \xrightarrow{[x\ y]} M \longrightarrow 0.$$

Für die Koszul-Kohomologie an den äußeren Stellen ergibt sich somit leicht:

$$H^{-2}(x, y; M) = (0 :_M (x, y)),$$
$$H^0(x, y; M) = M/(x, y)M.$$

Und für die Koszul-Kohomologie in der Mitte gilt

$$H^{-1}(x, y; M) = \frac{\{(a, b) \in M^2 \mid xa + yb = 0\}}{\{(-ym, xm) \in M^2 \mid m \in M\}},$$

was als Relationen-Modul von x und y modulo der trivialen Relationen interpretiert werden kann. Ist nun x M-regulär, also insbesondere Nichtnullteiler bzgl. M so sieht man leicht, dass dann die

Abbildung

$$\begin{aligned}\phi:\ (xM :_M y) &\longrightarrow H^{-1}(x,y;M)\\ c &\longmapsto \overline{(cy/x,-c)}\end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Außerdem sehen wir, dass $xM \subseteq Ker\phi$ gilt und für $c \in Ker\phi$ gilt $(cy/x,-c) = (-ym, xm)$ für ein $m \in M$. Also auch $c \in xM$ und somit $Ker\phi = xM$. Sei weiter $\overline{(a,b)} \in H^{-1}(x,y,M)$ gegeben, so gilt einerseits $xa + yb = 0$ und somit $-b \in (xM :_M y)$. Andererseits ist dann $\phi(-b) = \overline{(a,b)}$, also ϕ surjektiv. Insgesamt impliziert der Homomorphiesatz

$$H^{-1}(x,y;M) \cong (xM :_M y)/xM,$$

wenn x M-regulär ist.

Durch die Bemerkung 2.1.17 und Beispiel 2.1.21 ist es gerechtfertigt zu vermuten, dass die Koszul-Komplexe bzw. die dazugehörige Koszul-Kohomologie in der Lage ist, reguläre Folgen zu erkennen. Dass dies tatsächlich richtig ist, zeigt der folgende Satz, der auch als "depth-sensitivity" der Koszul-Komplexe bekannt ist.

Satz 2.1.22. *Sei $M \neq 0$ ein R-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ eine Folge von Elementen aus R mit $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_d)$. Dann gilt:*

(i) Falls $\mathfrak{a}$ eine quasi-reguläre Folge bzgl. M der Länge t enthält, dann gilt:

$$H^{j-d}(\boldsymbol{x}; M) = 0 \quad \text{für } j < t.$$

(ii) Ist M endlich erzeugt und $\mathfrak{a}M \neq M$, dann gilt

$$depth_R(\mathfrak{a}; M) = min\{j \mid H^{j-d}(\boldsymbol{x}; M) \neq 0\}.$$

Beweis. [ea07, Theorem 6.21]. □

Wir wollen nun aber wieder zurück zur lokalen Kohomologie kommen und eine weitere Möglichkeit kennenlernen, diese Moduln zu definieren. Es wird sich herausstellen, dass die lokalen Kohomologiemoduln als direkter Limes von Kohomologiemoduln von Komplexen, die durch dualisieren der Koszul-Komplex entstehen, ausgedrückt werden können, wie der nachfolgende Satz zeigt.

Satz 2.1.23. *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und sei $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_c$ ein Erzeugendensystem von I. Dann gilt für alle $i \geq 0$ und jeden R-Modul M:*

$$H^i_I(M) \cong \varinjlim_t H^i(Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}^t; R), M)).$$

Beweis. [ea07, Construction 7.10 und Theorem 7.11]. □

2.1.4 Der Čech-Komplex

Zum Abschluss der Einführung und Definition der lokalen Kohomologiemoduln wollen wir jetzt noch eine letzte Möglichkeit besprechen, diese Moduln zu berechnen. Diesmal wird sich zeigen, dass die lokale Kohomologie in Zusammenhang mit der Kohomologie sogenannter Čech-Komplexe steht, welche wiederum in engem Zusammenhang mit Koszul-Komplexen stehen und somit eine alternative Formulierung von Satz 2.1.23 liefern. Beginnen wir also mit der Definition dieser speziellen Komplexe.

Definition 2.1.24 (Čech-Komplex). *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und sei $x \in R$ gegeben. Dann ist der* ***Čech-Komplex*** *bzgl. x der Komplex*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} R_x \longrightarrow 0,$$

wobei ι die natürliche Abbildung bezeichnet, also die Abbildung, die $r \in R$ auf die Äquivalenzklasse des Bruches $r/1 \in R_x$ abbildet. R befindet sich dabei im Grad 0 und R_x im Grad 1. Wir bezeichnen ihn mit $\check{C}^\bullet(x; R)$. Sei nun $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ eine Folge von Elementen aus R, so bezeichnen wir den Komplex

$$\check{C}^\bullet(\boldsymbol{x}; R) = \check{C}^\bullet(x_1; R) \otimes_R \cdots \otimes_R \check{C}^\bullet(x_d, R)$$

als Čech-Komplex bzgl der Folge $\boldsymbol{x}$.

Definition 2.1.25 (Čech-Kohomologie). *Sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ eine Folge von Elementen aus R und M ein R-Modul. Dann bezeichnen wir den Komplex*

$$\check{C}^\bullet(\boldsymbol{x}; M) = \check{C}^\bullet(\boldsymbol{x}; R) \otimes_R M$$

als ***Čech-Komplex von M*** *bzgl.* $\boldsymbol{x}$*. Die* ***Čech-Kohomologie von M*** *bzgl. $\boldsymbol{x}$ ist*

$$\check{H}^i(\boldsymbol{x}; M) = H^i(\check{C}^\bullet(\boldsymbol{x}; M)) \qquad \textit{für } i \in \mathbb{Z}.$$

Damit besitzt der Čech-Komplex $\check{C}^\bullet(\mathbf{x}; M)$ eines R-Modules M bzgl. der Folge $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_d$ von Elementen aus R die folgende Gestalt:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{1 \le i \le d} M_{x_i} \longrightarrow \bigoplus_{1 \le i < j \le d} M_{x_i x_j} \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_{x_1 \ldots x_d} \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Wie im Fall von Koszul-Komplexen ist die Čech-Kohomologie für kurze Folgen einfach zu berechnen. Betrachten wir also das folgende einfache Beispiel.

Beispiel 2.1.26. *Sei $x \in R$ ein Ringelement und sei*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} R_x \longrightarrow 0,$$

der Čech-Komplex bzgl. x. Dann ist

$$\begin{aligned} \check{H}^0(x; R) &= \{r \in R \,|\, r/1 = 0 \textit{ in } R_x\} \\ &= \{r \in R \,|\, x^a r = 0 \textit{ für ein } a \ge 0\} \\ &= \bigcup_{a \ge 0} (0 :_R x^a) \end{aligned}$$

gerade die Vereinigung der Annullatoren von x^a und es gilt $\check{H}^1(x; R) \cong R_x/R$.

Bemerkung 2.1.27 (siehe Remark 6.31 in [ea07]). *Im Gegensatz zum Koszul-Komplex $K^\bullet(\mathbf{x}; R)$, in welchem sämtliche auftretende Moduln, als endliche direkte Summen von R, frei sind, besteht der Čech-Komplex $\check{C}^\bullet(\boldsymbol{x}; R)$ aus direkten Summen von Lokalisierungen von R. So ist $\check{C}^0(\boldsymbol{x}; R) = R$, während $\check{C}^1(\boldsymbol{x}; R) = R_{x_1} \oplus \cdots \oplus R_{x_d}$ gilt, und im Allgemeinen ist*

$$\check{C}^k(\boldsymbol{x}; R) = \bigoplus_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le d} R_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}$$

nicht endlich erzeugt über R, aber die Moduln sind flach, da $R_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}$ flach ist (siehe [Eis04, Proposition 2.5].

In Satz 2.1.23 haben wir gesehen, dass wir die lokalen Kohomologiemoduln mit Hilfe der Kohomologiemoduln von Komplexen der Gestalt $Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}^t; R), M)$ beschreiben können. Diese Komplexe entstehen also durch die Dualisierung der Koszul-Komplexe. Interessanterweise stellt sich jetzt heraus, dass die Komplexe $K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)$ zu sich selbst dual sind.

Satz 2.1.28. *Sei $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$ eine Folge von Elementen aus R und M ein R-Modul. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}^t; R), M) \cong K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)[-d]$$

von Komplexen von R-Moduln.

Beweis. [ea07, Construction 7.12]/[Eis04, Proposition 7.15]. □

Betrachten wir nun den direkten Limes der Komplexe auf der rechten Seite noch etwas genauer, so gilt wegen der Vertauschbarkeit von Limes und Tensorprodukt (siehe [Mat86, Theorem A.1])

$$\varinjlim_t (K^\bullet(\mathbf{x}^t; M))[-d] \cong (\varinjlim_t K^\bullet(x_1^t; M)[-1]) \otimes_R \cdots \otimes_R (\varinjlim_t K^\bullet(x_d^t; M)[-1]).$$

Nun wird für $x \in R$, $\varinjlim_t K^\bullet(x^t; M)[-1]$ von dem folgenden direkten System induziert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x^t"] \arrow[d, equal] & R \arrow[r] \arrow[d, "x"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x^{t+1}"] & R \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Dabei befindet sich R wegen der Gradverschiebung in den Graden 0 und 1. Nun wird der Limes komponentenweise gebildet und damit ergibt sich in der ersten Spalte natürlich einfach R und in der zweiten Spalte entsteht das System $R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} \ldots$. Dessen Limes ist aber die Lokalisierung von R an x, also R_x. Damit ist der Limes des obigen Systems gerade

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} R_x \longrightarrow 0,$$

und somit gilt nach Definition des Čech-Komplexes

$$\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathbf{x}; M) = \varinjlim_t (K^\bullet(\mathbf{x}^t; M))[-d].$$

Wir können Satz 2.1.23 also alternativ auch folgendermaßen formulieren und lokale Kohomologie mit Hilfe von Čech-Kohomologie beschreiben.

Satz 2.1.29. *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und sei $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_c$ ein Erzeugendensystem von I. Dann gilt für alle $i \geq 0$ und jeden R-Modul M:*

$$H_I^i(M) \cong H^i(\check{C}^\bullet(\mathbf{x}; R) \otimes_R M).$$

Beweis. Dies folgt aus der obigen Konstruktion zusammen mit Satz 2.1.23. Ein detailierter Beweis findet sich in [ea07, Theorem 7.13]. □

2.2 Injektive Moduln und Matlis-Dualität

Wir wollen uns jetzt mit der Theorie der injektiven Moduln befassen. Insbesondere für einen noetherschen Ring R erhalten wir eine schöne Strukturtheorie für injektive R-Moduln, welche erstmals von Matlis in [Mat58] entwickelt wurde. Der folgende Überblick zeigt eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse, die in dieser Reihenfolge im Folgenden besprochen werden.

(i) Jeder R-Modul M besitzt eine injektive Hülle $E_R(M)$. Diese ist ein, M enthaltender, injektiver Modul mit der Eigenschaft, dass jeder injektive Modul, der M enthält, $E_R(M)$ als direkten Summanden besitzt.

(ii) Ein injektiver Modul über einem noetherschen Ring besitzt eine eindeutige Darstellung als direkte Summe von unzerlegbaren injektiven Moduln.

(iii) Ist der Ring R noethersch, so sind die unzerlegbaren injektiven R-Moduln von der Gestalt $E_R(R/\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R.

(iv) (Matlis-Dualität) Sei R ein kompletter lokaler Ring und E die injektive Hülle des Residuenkörpers. Der Funktor $D(-) = Hom_R(-, E)$ besitzt folgende Eigenschaften:

   (a) Falls M noethersch ist, so ist $D(M)$ artinsch.

   (b) Falls M artisch ist, so ist $D(M)$ noethersch.

   (c) Ist M noethersch und artinsch so gilt: $D(D(M)) \cong M$.

Zunächst beginnen wir aber mit den grundlegenden Definitionen. Es sei erwähnt, dass die Inhalte dieses Abschnittes überwiegend dem Vorlesungsskript [St8] über "Castelnuovo-Mumford-Regularität" von Herrn Prof. Stückrad entnommen sind.

Es sei zu Beginn an Definition 2.1.3 erinnert:

Bemerkung 2.2.1. *Ein R-Modul E heißt injektiv, falls der Funktor $Hom_R(-, E)$ exakt ist.*

2.2.1 Grundlegende Definitionen

Wir beginnen mit der folgenden allgemeinen Definition:

Definition 2.2.2. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.*

*(i) Ein Objekt E von $\mathcal{C}$ heißt **injektiv**, wenn jedes Diagramm in $\mathcal{C}$ der Gestalt*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ E & & \end{array}$$

mit monomorphem f (M, N Objekte, f, g Morphismen von $\mathcal{C}$) durch einen Morphismus $h : N \to E$ von $\mathcal{C}$ kommutativ gefüllt werden kann (d.h. es gilt $h \circ f = g$).

*(ii) Man sagt, $\mathcal{C}$ **besitzt genügend viele Injektive**, wenn es für jedes Objekt M von $\mathcal{C}$ ein injektives Objekt E und einen Monomorphismus $M \to E$ in $\mathcal{C}$ gibt.*

In diesem Abschnitt werden wir ausschließlich Modulkategorien betrachten, wobei alle Ringe stets kommutativ sind und ein vom Nullelement verschiedenes Einselement besitzen.
Sei R ein Ring. Wenn wir es mit multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen von R (also mit Unterhalbgruppen von $(R,\cdot)$) zu tun haben, setzen wir stets stillschweigend voraus, dass diese 1_R enthalten (also bereits Untermonoide von $(R,\cdot)$ sind).

Bemerkung 2.2.3. *(i) Ist E injektiver R-Untermodul eines R-Moduls M, so gibt es einen R-Untermodul N von M mit $M = E + N$ und $E \cap N = 0$, d.h. $M \cong E \oplus N$. Dies ergibt sich sofort aus dem Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\subseteq} & M \\ \big\downarrow{\scriptstyle id_E} & & \\ E & & \end{array}$$

(ii) Allgemeiner spaltet jeder Monomorphismus $f : E \to M$ eines injektiven R-Moduls E in einen R-Modul M auf, d.h. es gibt einen R-Modul E' sowie R-Homomorphismen $f' : E' \to M$, $g : M \to E$, $g' : M \to E'$ mit $gf = id_E$, $g'f' = id_{E'}$ und $fg + f'g' = id_M$.

Satz 2.2.4 (Baer-Kriterium)**.** *Für einen R-Modul E sind äquivalent:*

(i) E ist injektiv.

(ii) Für jedes Ideal I von R und jeden R-Homomorphismus $\varphi : I \to E$ gibt es einen R-Homomorphismus $\psi : R \to E$ mit $\psi|_I = \varphi$.

(iii) Für jedes Ideal I von R und jeden R-Homomorphismus $\varphi : I \to E$ gibt es ein $e \in E$ mit $\varphi(x) = xe$ für alle $x \in I$.

(iv) Für jedes Ideal I von R induziert die Einbettung $I \subseteq R$ einen Epimorphismus $Hom_R(R, E) \to Hom_R(I, E)$.

Beweis. [St8, Satz 1.3]. □

Bemerkung 2.2.5. *Sei $\Bbbk$ ein Körper. Da $\Bbbk$ nur die Ideale 0 und $\Bbbk$ besitzt, ist jeder $\Bbbk$-Vektorraum nach dem Baer-Kriterium injektiver $\Bbbk$-Modul.*

Lemma 2.2.6. *Sei $(E_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von R-Moduln, wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Dann gilt:*

(i) Wenn E_ι injektiver R-Modul ist für alle $\iota \in I$, so ist $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ injektiver R-Modul. Ist R noethersch, so ist auch $\coprod_{\iota \in I} E_\iota$ injektiver R-Modul.

(ii) Wenn $\coprod_{\iota \in I} E_\iota$ oder $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ injektiver R-Modul ist, so ist E_ι injektiver R-Modul für alle $\iota \in I$.

Beweis. [St8, Lemma 1.5]. □

Wir erinnern daran, dass eine abelsche Gruppe G ***teilbar*** heißt, wenn für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und jedes $g \in G$ ein $h \in G$ existiert mit $g = nh$. (Offensichtlich reicht es, dies für alle $n \in \mathbb{N}^+$ zu fordern.) Da die Ideale in $\mathbb{Z}$ die Gestalt $n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{Z}$ haben und für $n \neq 0$ damit freie $\mathbb{Z}$-Moduln sind, ist jeder Homomorphismus $n\mathbb{Z} \to G$ durch Angabe eines Elementes $g \in G$ eindeutig festgelegt ($g = 0_G$, falls $n = 0$) und damit ergibt sich aus dem Baer-Kriterium (Satz 2.2.4 (iii) $\Leftrightarrow$ (i)):

Korollar 2.2.7. *Eine abelsche Gruppe ist teilbar genau dann, wenn sie ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist.* □

Wir wollen nun zeigen, dass die Kategorie der R-Moduln genügend viele Injektive besitzt (siehe Definition 2.2.2(ii)). Es stellt sich sogar heraus, dass es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten "kleinsten" R-Modul E mit dieser Eigenschaft gibt, die sogenannte ***injektive Hülle*** $E_R(M)$ von M, siehe Definition 2.2.16 unten. Dazu beweisen wir eine Reihe von Aussagen.

Lemma 2.2.8. *(i) Ist Q teilbare abelsche Gruppe, so ist Q/U teilbar für jede Untergruppe U von Q.*

(ii) Ist G eine abelsche Gruppe, so ist $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ teilbar.

(iii) Für jede abelsche Gruppe G gibt es eine teilbare abelsche Gruppe Q mit $G \subseteq Q$.

Beweis. (i) Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\alpha \in Q/U$. Wir schreiben $\alpha = a + U$ mit $a \in Q$ und wählen $b \in Q$ mit $a = nb$. Nun setzen wir $\beta := b + U$. Dann gilt $n\beta = (nb) + U = \alpha$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und und $\xi \in G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Wir schreiben $\xi = \sum_{i=1}^m g_i \otimes q_i$ mit $g_1, \ldots, g_m \in A$, $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ und setzen $\eta := \sum_{i=1}^m g_i \otimes (\frac{1}{n} q_i)$. Dann gilt $n\eta = \sum_{i=1}^m n\left(g_i \otimes (\frac{1}{n} q_i)\right) = \sum_{i=1}^m g_i \otimes (n\frac{1}{n} q_i) = \xi$.

(iii) Sei F eine freie abelsche Gruppe, so dass $G = F/U$ mit einer Untergruppe U von F. Da somit (F ist frei) $F \cong F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \subseteq F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ gilt, also o.B.d.A. $F \subseteq Q := F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, haben wir $G = F/U \subseteq Q/U$. Nach (ii) und (i) ist Q/U aber teilbar.

□

Korollar 2.2.9. *Die Kategorie der abelschen Gruppen besitzt genügend viele Injektive.* □

Lemma 2.2.10. *Sei E ein injektiver R-Modul. Ist A ein weiterer Ring und ist $f : R \to A$ ein Ringhomomorphismus, so ist $Hom_R(A, E)$ ein injektiver A-Modul. Ist insbesondere A eine R-Algebra, so ist $Hom_R(A, E)$ ein injektiver A-Modul.*

Beweis. Für jeden A-Modul N gibt es einen natürlichen A-Isomorphismus $f_N : Hom_A(N, Hom_R(A, E)) \to Hom_R(N \otimes_A A, E) \cong Hom_R(N, E)$, wobei wir A und damit jeden A-Modul vermöge f als R-Modul auffassen (man beachte zudem, dass $N \otimes_A A \cong N$). Damit haben wir für jedes Ideal I von A ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(A, Hom_R(A, E)) & \xrightarrow{f_A} & Hom_R(A, E) \\ \big\downarrow g & & \big\downarrow h \\ Hom_A(J, Hom_R(A, E)) & \xrightarrow{f_J} & Hom_R(J, E) \end{array}$$

wobei die vertikalen Homomorphismen g und h durch $I \subseteq A$ induziert sind. Da E injektiver R-Modul ist, ist h surjektiv nach Satz 2.2.4. Damit ist aber auch g surjektiv und die Behauptung folgt wiederum aus Satz 2.2.4. □

Korollar 2.2.11. *Die Kategorie der R-Moduln besitzt genügend viele Injektive.*

Beweis. Sei M ein R-Modul. Indem man R als $\mathbb{Z}$-Algebra und M als $\mathbb{Z}$-Modul (also abelsche Gruppe) auffasst, erkennt man, dass die Einbettung $Hom_R(R, M) \subseteq Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ zusammen mit dem natürlichen Isomorphismus $M \cong Hom_R(R, M)$ einen R-Monomorphismus $M \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ liefert. Die Einbettung $M \subseteq Q$ induziert eine weitere injektive Abbildung $\psi : Hom_{\mathbb{Z}}(R, M) \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. Nach Lemma 2.2.10 ist $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ ein injektiver R-Modul. Außerdem sieht man sofort, dass ψ ein R-Homomorphismus ist. $\psi\varphi$ ist also Monomorphismus von M in den injektiven R-Modul $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. Identifizieren wir die Elemente von M mit ihren Bildelementen in $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$, so erhalten wir einen injektiven R-Modul E mit $M \subseteq E$. □

2.2.2 Injektive Hüllen

Definition 2.2.12. *Seien M, N R-Moduln, $M \subseteq N$. N heißt* ***wesentliche Erweiterung*** *von M, wenn für jeden R-Untermodul U von N mit $U \neq 0$ gilt $U \cap M \neq 0$.*

Lemma 2.2.13. *Seien M, N, P R-Moduln mit $M \subseteq N \subseteq P$. Dann gilt:*

(i) N ist wesentliche Erweiterung von M genau dann, wenn es für jedes $n \in N \setminus \{0_N\}$ ein $r \in R$ gibt, so dass $rn \in M \setminus \{0_M\}$.

(ii) P ist wesentliche Erweiterung von M genau dann, wenn P wesentliche Erweiterung von N und N wesentliche Erweiterung von M ist.

(iii) Ist N wesentliche Erweiterung von M und ist R noethersch, so gilt $Supp_R M = Supp_R N$.

Beweis. [St8, Lemma 1.12]. □

Lemma 2.2.14. *Seien M, N R-Moduln mit $M \subseteq N$. Dann gibt es einen Untermodul E von N, der maximale wesentliche Erweiterung von M in N ist. Ist N injektiv, so auch E.*

Beweis. [St8, Lemma 1.13]. □

Sei M ein R-Modul. Nach Folgerung 2.2.11 gibt es einen injektiven R-Modul N mit $M \subseteq N$. Nach Lemma 2.2.14 besitzt M eine maximale wesentliche Erweiterung E in N, die ebenfalls nach Lemma 2.2.14 injektiv, also eine injektive wesentliche Erweiterung von M ist. Damit haben wir:

Lemma 2.2.15. *Seien M_1, M_2 R-Moduln und sei $\varphi : M_1 \to M_2$ ein R-Homomorphismus. Weiter seien E_1 und E_2 R-Moduln mit $M_1 \subseteq E_1$ und $M_2 \subseteq E_2$. Wenn E_2 injektiv ist, so gibt es einen R-Homomorphismus $f : E_1 \to E_2$ mit $f|_{M_1} = \varphi$, d.h. $f(m) = \varphi(m)$ für alle $m \in M_1$, und es gilt:*

(i) Ist E_1 wesentliche Erweiterung von M_1 und ist φ Monomorphismus, so ist auch f Monomorphismus.

(ii) Sind E_1 und E_2 wesentliche injektive Erweiterungen von M_1 und M_2 und ist φ Isomorphismus, so ist auch f Isomorphismus.

(iii) Injektive wesentliche Erweiterungen eines R-Moduls M sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und jeder derartige Isomorphismus ist Erweiterung des identischen Homomorphismus von M.

Beweis. [St8, Lemma 1.14]. □

Definition 2.2.16 (injektive Hülle). *Sei M ein R-Modul. Die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte injektive wesentliche Erweiterung von M heißt* ***injektive Hülle*** *von M, Bezeichnung $E_R(M)$ oder kurz $E(M)$.*

Beispiel 2.2.17. *Sei R ein Integritätsring und Q sein Quotientenkörper. Ist $q \in Q$, $q \neq 0$, und schreiben wir $q = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in R \setminus \{0\}$, so gilt $0 \neq r = sq \in R$ und damit ist Q eine wesentliche Erweiterung von R.*
Sei I ein Ideal von R und $f \in Hom_R(I, Q)$. Wenn $I \neq 0$, so wähle $x \in I$ mit $x \neq 0$. Wir setzen $q := x^{-1}f(x) \in Q$. Für $y \in I$ gilt dann $f(y) = f(yx^{-1}x) = yq$ und damit ist Q injektiver R-Modul (siehe Satz 2.2.4), also injektive Hülle von R.

Sei nun M ein R-Modul. Dann können wir mit Lemma 2.2.15(iii) bzw. (ii) iterativ eine bis auf (Komplex-)Isomorphie eindeutig bestimmte exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow[\subseteq]{\iota^0} E^0(M) \xrightarrow{\iota^1} E^1(M) \xrightarrow{\iota^2} \dots$$

konstruieren, wobei $E^0(M) := E_R(M)$ und $E^i(M) := E_R(coker\, \iota^{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$. Damit haben wir:

Definition 2.2.18 (minimale injektive Auflösung). *Sei M ein R-Modul. Der aus der soeben beschriebenen exakten Folge entstehende und bis auf (Komplex-)Isomorphie eindeutig durch M bestimmte Komplex*

$$0 \longrightarrow E^0(M) \xrightarrow{\iota^1} E^1(M) \xrightarrow{\iota^2} \dots$$

heißt ***minimale injektive Auflösung*** *von M und wird mit $E^\bullet_R(M)$ oder $E^\bullet(M)$ bezeichnet.*

Mit diesen Bezeichnungen haben wir nun:

Lemma 2.2.19. *Sei R noethersch und M ein R-Modul.*

(i) Es gilt $Supp_R E_R(M) = Supp_R M$.

(ii) Ist $0 \to E^0(M) \to E^1(M) \to \dots$ minimale injektive Auflösung von M, so gilt $Supp_R E^i(M) \subseteq Supp_R M$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) ergibt sich sofort aus Lemma 2.2.13(iii) und (ii) folgt mittels Induktion nach i. □

Lemma 2.2.20. *Sei R noethersch und seien E, M R-Moduln, E injektiv. Weiter sei S multiplikativ abgeschlossen in R. Dann gilt:*

(i) $S^{-1}E$ ist injektiver $S^{-1}R$-Modul.

(ii) $S^{-1}E_R(M) \cong E_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

Beweis. [St8, Lemma 1.19]. □

Lemma 2.2.21. *Seien A, M, N R-Moduln, wobei N wesentliche Erweiterung von M ist. Wir fassen $Hom_R(A, M)$ als R-Untermodul von $Hom_R(A, N)$ auf. Dann gilt:*

(i) Ist A endlich erzeugt, so ist $Hom_R(A, N)$ wesentliche Erweiterung von $Hom_R(A, M)$.

(ii) Ist A eine endliche R-Algebra, so gilt $E_A(Hom_R(A,M)) = Hom_R(A, E_R(M))$ (bis auf A-Isomorphie).

Beweis. [St8, Lemma 1.20]. □

Wir erinnern daran, dass ein R-Modul M ***zerlegbar*** (manchmal auch ***direkt zerlegbar***) heißt, wenn $M \cong P \oplus Q$ mit R-Moduln $P \neq 0$ und $Q \neq 0$. Offenbar ist dies äquivalent zur Existenz von Untermoduln $U \neq 0, V \neq 0$ von M mit $U \cap V = 0$ und $U + V = M$. Weiter heißt ein Untermodul U von M ***irreduzibel***, wenn aus $U = V \cap W$ mit Untermoduln V und W von M folgt, dass $U = V$ oder $U = W$. Ist z. B. der Nulluntermodul von M irreduzibel, so ist M unzerlegbar. Primideale von R sind irreduzibel. Jedoch gibt es irreduzible Ideale, die keine Primideale sind. Ist $\mathfrak{p}$ irreduzibles Ideal von R und ist $R/\mathfrak{p}$ noethersch, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primärideal von R.

Lemma 2.2.22. *Sei $E \neq 0$ ein injektiver R-Modul.*

(i) E ist unzerlegbar genau dann, wenn $E = E_R(R/\mathfrak{p})$ mit einem irreduziblen Ideal $\mathfrak{p}$ von E.

(ii) Ist R noethersch, so ist E unzerlegbar genau dann, wenn $E = E_R(R/\mathfrak{p})$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}$ von E.

Beweis. [St8, Lemma 1.21]. □

Eine wichtige Konsequenz hieraus ist:

Korollar 2.2.23. *Sei $\mathfrak{p} \in Spec\, R$ und sei S Untermonoid von $(R \setminus \mathfrak{p}, \cdot)$. Dann ist der kanonische Homomorphismus $E_R(R/\mathfrak{p}) \to S^{-1}E_R(R/\mathfrak{p})$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist der kanonische Homomorphismus $E_R(R/\mathfrak{p}) \to E_R(R/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ ein Isomorphismus. $E_R(R/\mathfrak{p})$ ist damit in natürlicher Weise ein $R_\mathfrak{p}$-Modul und es gilt sogar $E_R(R/\mathfrak{p}) = E_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$.*

Beweis. [St8, Folgerung 1.22]. □

2.2.3 Injektive Moduln über noetherschen Ringen

In Lemma 2.2.6(i) haben wir gesehen, dass beliebige Koprodukte injektiver Moduln wieder injektiv sind, wenn R noethersch ist. Für nicht noethersches R ist das im Allgemeinen falsch. Es gilt nämlich:

Satz 2.2.24. *(H. Bass) Ein Ring R ist noethersch genau dann, wenn beliebige Koprodukte injektiver R-Moduln wieder injektiv sind.*

Beweis. [St8, Satz 1.23]. □

Wie bereits erwähnt, hat man über noetherschen Ringen eine recht gute, auf Matlis zurückgehende, Strukturtheorie für injektive Moduln (siehe [Mat58]). Diese soll jetzt kurz dargelegt werden.

Die Vorgehensweise im Beweis von Lemma 2.2.22(ii) (siehe [St8, 1.22]) lässt sich wie folgt verallgemeinern: Sei $E \neq 0$ ein injektiver R-Modul und sei $\mathfrak{p} \in Ass_R E$ ($\neq \emptyset$, da R noethersch). Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass $E_R(R/\mathfrak{p})$ Untermodul von E ist und somit gibt es einen injektiven Untermodul F von E mit $E = E_R(R/\mathfrak{p}) + F$ und $E_R(R/\mathfrak{p}) \cap F = 0$, d.h. $E \cong E_R(R/\mathfrak{p}) \oplus F$, vgl. Bemerkung 2.2.3. Damit haben wir:

Satz 2.2.25. *Jeder injektive Modul über einem noetherschen Ring R ist isomorph zu einem Koprodukt unzerlegbarer injektiver R-Moduln.*

Beweis. [St8, Satz 1.24]. □

Korollar 2.2.26. *Sei R noethersch und E ein injektiver R-Modul. E besitzt eine Zerlegung in ein Koprodukt injektiver R-Moduln der Gestalt $E_R(R/\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in Spec\, R$.*

Beweis. Nach Satz 2.2.25 ist E Koprodukt unzerlegbarer injektiver R-Moduln und nach Lemma 2.2.22(ii) haben derartige Moduln die Gestalt $E_R(R/\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p} \in Spec\, R$. □

Sei R noethersch und M ein R-Modul. $E_R(M)$ besitzt nach Folgerung 2.2.26 eine Zerlegung in ein Koprodukt injektiver R-Moduln der Gestalt $E_R(R/\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in Spec\, R$. Wir zeigen nun, dass für $\mathfrak{p} \in Spec\, R$ die Kardinalität, mit welcher $E_R(R/\mathfrak{p})$ in einer derartigen Zerlegung von $E_R(M)$ als Kofaktor auftritt, nur von M abhängt, also unabhängig ist von der gewählten Zerlegung. Damit ist diese Zerlegung eindeutig. Hierzu benötigen wir folgende Vorüberlegungen:

Lemma 2.2.27. *Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein R-Modul. Die Einbettung $M \subseteq E_R(M)$ induziert für alle $\mathfrak{p} \in Spec\, R$ einen Isomorphismus*

$$Hom_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \cong Hom_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, E_R(M)_\mathfrak{p}).$$

Damit gilt insbesondere $Ass_R E_R(M) = Ass_R M$.

Beweis. Da nach Lemma 2.2.20(ii) gilt $E_R(M)_\mathfrak{p} \cong E_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass R lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist. Sei $k := R/\mathfrak{p}$. Die Einbettung $M \subseteq E_R(M)$ induziert eine Einbettung $Hom_R(k, M) \subseteq Hom_R(k, E_R(M))$. Nach Lemma 2.2.21(ii) gilt nun

$$Hom_R(k, E_R(M)) = E_k(Hom_R(k, M)) = Hom_R(k, M),$$

denn jeder Vektorraum über einem Körper k ist ein injektiver k-Modul. Der Rest ist klar, da damit gilt $Ass_R M = \{\mathfrak{p} \in Spec\, R \mid Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) \neq 0\} = \{\mathfrak{p} \in Spec\, R \mid Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), E_R(M)_\mathfrak{p})$
$\neq 0\} = Ass_R E_R(\mathfrak{p})$. □

Satz 2.2.28. *Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein R-Modul. Wir zerlegen $E_R(M)$ gemäß Satz 2.2.25 in ein Koprodukt unzerlegbarer injektiver R-Moduln. Für $\mathfrak{p} \in Spec\, R$ bezeichnen wir mit $\Lambda_\mathfrak{p}(M)$ die Kardinalzahl, mit welcher $E_R(R/\mathfrak{p})$ in dieser Zerlegung vorkommt. Dann gilt mit $k(\mathfrak{p}) := R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$:*

$$\Lambda_\mathfrak{p}(M) = dim_{k(\mathfrak{p})} Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p})$$

Beweis. Nach Lemma 2.2.27 dürfen wir annehmen, dass $M = E_R(M)$, d.h. dass M injektiver R-Modul ist. Sei $M \cong \coprod_{\mathfrak{q} \in Spec\, R} E_R(R/\mathfrak{q})^{(\Lambda_\mathfrak{q})}$ und sei $\mathfrak{p} \in Spec\, R$. Dann gilt mit Lemma 2.2.27:

$$\begin{aligned}
Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) &\cong \coprod_{\mathfrak{q} \in Spec\, R} Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), E_R(R/\mathfrak{q})_\mathfrak{p})^{(\Lambda_\mathfrak{q})} \\
&\cong \coprod_{\mathfrak{q} \in Spec\, R} Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), (R/\mathfrak{q})_\mathfrak{p})^{(\Lambda_\mathfrak{q})} \\
&\cong Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), k(\mathfrak{p}))^{(\Lambda_\mathfrak{p})} \\
&\cong k(\mathfrak{p})^{(\Lambda_\mathfrak{p})},
\end{aligned}$$

denn für $\mathfrak{q} \in Spec\, R$ gilt $(R/\mathfrak{q})_\mathfrak{p} = 0$, falls $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$ und falls $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$, $Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), (R/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}) = Hom_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}) = ((\mathfrak{q} :_R \mathfrak{p})/\mathfrak{q})_\mathfrak{p} = 0$. □

Fassen wir Korollar 2.2.26 und Satz 2.2.28 nochmal zusammen, so erhalten wir:

Korollar 2.2.29. *Sei R ein noetherscher Ring und E ein injektiver R-Modul. Dann existiert eine direkte Summenzerlegung*

$$E \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Spec\, R} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_\mathfrak{p}},$$

und die Zahlen $\mu_\mathfrak{p}$ sind unabhängig von der Zerlegung. □

Wir kommen jetzt zur Definition der Bass-Zahlen eines R-Moduls M. Es sei daran erinnert (siehe Einleitung), dass es eine wichtige Frage ist für einen gegebenen R-Modul zu entscheiden, ob seine Bass-Zahlen endlich sind.

Definition 2.2.30 (Bass-Zahl)**.** *Sei M ein R-Modul und $E^\bullet$ seine minimale injektive Auflösung. Für jedes i liefert dann Satz 2.2.29 eine Zerlegung*

$$E^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Spec\, R} E_R(R/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p}, M)}.$$

*Die Zahl $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ heißt dabei **i-te Bass-Zahl** von M bzgl. $\mathfrak{p}$. Der folgende Satz zeigt, dass diese Zahl wohldefiniert ist und verallgemeinert Satz 2.2.28.*

Satz 2.2.31. *Sei R ein noetherscher Ring und M ein R-Modul. Sei außerdem $\mathfrak{p}$ ein Primideal, und setze $k(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Dann gilt:*

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = dim_{k(\mathfrak{p})} Ext^i_{R_\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}).$$

Beweis. [ea07, Theorem A.24]. □

2.2.4 Matlis-Dualität

Wir werden jetzt die Matlis-Dualität vorstellen. Sei dazu $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein lokaler Ring. Wir definieren nun das Folgende:

Definition 2.2.32 (Matlis-Dual)**.** *Sei $E := E_R(R/\mathfrak{m})$ die injektive Hülle des Residuenkörpers von R und M ein R-Modul. Wir setzen*

$$D_R(M) := Hom_R(M, E)$$

*und nennen diesen R-Modul das **Matlis-Dual** von M. Ist der zugrundeliegende Ring klar, so schreiben wir oft einfach nur $D(M)$.*

Die Zuordnung $M \mapsto D(M)$ liefert uns nun sogar einen exakten Funktor in der Kategorie R-mod wie das kommende Lemma zeigt.

Lemma 2.2.33. *Für einen lokalen Ring R ist D_R ein exakter additiver kontravarianter Funktor, der endliche Limites und beliebige Kolimites respektiert. $D_R \circ D_R$ ist ein Erweiterungsfunktor des identischen Funktors in der Kategorie der R-Moduln, d.h. es gibt einen (funktoriellen) Monomorphismus $id \to D_R \circ D_R$.*

Beweis. [St8, Lemma 2.93] □

Das Dualitätstheorem von Matlis, welches in [Mat58] erstmals bewiesen wurde, liefert nun die Aussage, dass der Matlis-Funktor D_R im Falle eines kompletten lokalen Ringes sogar ein Dualitätsfunktor zwischen der Kategorie der endlich erzeugten R-Moduln und der Kategorie der artinschen R-Moduln ist. Die nötige Definition eines kompletten Ringes findet sich in Abschnitt 4.2.

Theorem 2.2.34 (Matlis-Dualität). *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter lokaler Ring und M ein R-Modul. Dann gilt:*

(i) Falls M noethersch (bzw. artinsch) ist, dann ist $D_R(M)$ artinsch (bzw. noethersch).

(ii) Falls M artinsch oder noethersch ist, dann ist die Abbildung $M \to D_R(D_R(M))$ ein Isomorphismus.

Beweis. [ea07, Theorem A.35]. □

2.3 Injektive Auflösungen von Gorenstein-Ringen

Die Notation eines Gorenstein-Ringes wurde von H.Bass in den 60er Jahren eingeführt. Diese Klasse von kommutativen Ringen erfüllt besondere Dualitätseigenschaften, wie wir im kommenden Abschnitt über lokale Dualität sehen werden. An dieser Stelle wollen wir kurz eine mögliche Charakterisierung dieser speziellen Ringe vorstellen, die sich in Kapitel 4 als nützlich erweisen wird. Beginnen wir mit der Definition dieser Ringe:

Definition 2.3.1 (Gorenstein-Ring). *Sei R ein noetherscher Ring. Dann heißt der Ring R* ***Gorenstein-Ring****, falls R endliche injektive Dimension besitzt, d.h. wenn gilt:*

$$inj\, dim_R\, R < \infty.$$

Dabei bezeichne die injektve Dimension eines R-Moduls M, $inj\, dim_R\, M$, die minimale Länge einer injektiven Auflösung von M (siehe Definition 2.1.4). Existiert keine endliche injektive Auflösung von M, so sei $inj\, dim_R\, M = \infty$.

Bemerkung 2.3.2 (siehe Lemma 4.6.1). *Wir werden später sehen, dass zum Beispiel jeder reguläre lokale Ring R auch ein Gorenstein-Ring ist.*

Betrachten wir die Struktur von injektiven Auflösungen eines Gorenstein-Ringes etwas genauer.

Satz 2.3.3. *Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $R_\mathfrak{p}$ ist Gorenstein;

(ii) $\mu^i_R(\mathfrak{p}, R) = 0$ für alle $i > height\, \mathfrak{p}$;

(iii) $\mu^i_R(\mathfrak{p}, R) = 0$ für ein $i > height\, \mathfrak{p}$;

(iv) $\mu^i_R(\mathfrak{p}, R) = \begin{cases} 0 & \text{für } i < height\, \mathfrak{p}, \\ 1 & \text{für } i = height\, \mathfrak{p}. \end{cases}$

Beweis. [ea07, Theorem 11.24]. □

Bemerkung 2.3.4 (Remark 11.25 in [ea07]). *Sei $I^\bullet$ eine minimale injektive Auflösung des Gorenstein-Ringes R. Dann ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R auch der Ring $R_\mathfrak{p}$ Gorenstein und $I^\bullet_\mathfrak{p}$ ist eine injektive Auflösung von $R_\mathfrak{p}$ (siehe [ea07, 11.1]/[ea07, A.22]). Dann impliziert der letzte Satz:*

$$I^i \cong \bigoplus_{height\, \mathfrak{p}=i} E_R(R/\mathfrak{p}).$$

Das folgende Resultat liefert uns nun die eben angesprochene mögliche Charakterisierung der Gorenstein-Ringe. Außerdem erhalten wir einen Zusammenhang zwischen einem bestimmten lokalen Kohomologiemodul und der injektiven Hülle des Residuenkörpers eines lokalen Ringes $(R, \mathfrak{m})$. Dies bildet einerseits den Zugang zur lokalen Dualität im kommenden Abschnitt, andererseits können wir diese Aussage später verwenden, um $E_R(R/\mathfrak{m})$ mit einer $\mathcal{F}$-Modul-Struktur zu versehen (siehe Abschnitt 4.6).

Satz 2.3.5. *Sei $(R, \mathfrak{m}\,\mathbb{k})$ ein lokaler Ring der Dimension d. Dann ist R genau dann Gorenstein, wenn gilt:*

$$H^i_\mathfrak{m}(R) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq d, \\ E_R(\mathbb{k}) & \text{für } i = d. \end{cases}$$

Beweis. [ea07, Theorem 11.26]. □

2.4 Lokale Dualität

Wir haben in Kapitel 2.2.34 gesehen, dass uns die Theorie der Matlis-Dualität für einen lokalen und kompletten Ring $(R, \mathfrak{m})$ eine Korrepondenz zwischen der Kategorie der artinschen R-Moduln und der Kategorie der noetherschen R-Moduln liefert. Andererseits ist im Fall eines lokalen Ringes bekannt (siehe z.B. [BS08, 7.1.3] oder Satz 5.2.2), dass für einen endlich erzeugten Modul M der Modul $H^i_\mathfrak{m}(M)$ für alle i artinsch ist. Es stellt sich also natürlicherweise die Frage, welche noetherschen Moduln zu diesen lokalen Kohomologiemoduln korrespondieren. Das sogenannte lokale Dualitätstheorem beantwortet diese Frage und soll im Folgenden besprochen werden.

Satz 2.4.1 (Vgl. Theorem 1.17 in [ea07]). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und sei $d \geq 0$ eine ganze Zahl. Dann sind äquvalent:*

(i) $\dim R \leq d$.

(ii) es existiert ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, das von d Elementen erzeugt wird.

Beweis. [AM69, Theorem 11.14]. □

Definition 2.4.2 (Parametersystem). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring der Dimension d. Dann heißen Ringelemente $x_1, \ldots, x_d$* ***Parametersystem für R****, falls $\sqrt{(x_1, \ldots, x_d)} = \mathfrak{m}$ gilt.*

Definition 2.4.3 (Cohen-Macaulay Modul). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R-Modul. Dann heißt M* ***Cohen-Macaulay Modul****, falls $\operatorname{depth} M = \dim M$ gilt. Ist R selbst ein Cohen-Macaulay Modul, so heißt R auch* ***Cohen-Macaulay Ring*** *oder einfach Cohen-Macaulay. Ein Ring R heißt Cohen-Macaulay, falls $R_\mathfrak{m}$ Cohen-Macaulay ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R.*

Bemerkung 2.4.4 (Remark 10.2 in [ea07]). *Ein lokaler Ring ist genau dann Cohen-Macaulay, wenn jedes Parametersystem eine reguläre Folge bildet.*

Beispiel 2.4.5 (siehe Proposition 8.20 in [ea07]). *Jeder reguläre lokale Ring $(R, \mathfrak{m})$ ist ein Cohen-Macaulay Ring.*

Satz 2.4.6. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein lokaler Gorenstein-Ring der Dimension d und sei M endlich erzeugter Modul. Dann gilt für $0 \leq i \leq d$:*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong D_R(Ext^{d-i}_R(M, R)).$$

Beweis. [ea07, Theorem 11.29]. □

Bemerkung 2.4.7. *Insbesondere gilt damit für einen lokalen und kompletten Gorenstein-Ring der Dimension d und für einen endlich erzeugten Modul M wegen Theorem 2.2.34 das Folgende:*

$$D_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \cong Ext^{d-i}_R(M, R).$$

Die nächste Folgerung liefert uns eine Beschreibung der lokalen Kohomologie mit Support in $\mathfrak{m}$ über einem beliebigen kompletten lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$. Ein solcher Ring ist wegen Satz 4.3.5 im gleichcharakteristischen Fall oder wegen [ea07, 8.28] im allgemeinen Fall nämlich gerade homomorphes Bild eines regulären lokalen Ringes und damit nach Lemma 4.6.1 gerade homomorphes Bild eines lokalen Gorenstein-Ringes.

Korollar 2.4.8. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ das homomorphe Bild eines lokalen Gorenstein-Ringes S der Dimension c und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt für alle $i \geq 0$:*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong D_S(Ext^{c-i}_S(M, S)).$$

Beweis. [ea07, Corollary 11.30]. □

Ist der lokale Ring $(R, \mathfrak{m})$ sogar Cohen-Macaulay, so lässt sich die lokale Dualität noch besser formulieren. Insbesondere lässt es sich dann vermeiden, dass Ext-Moduln über dem Ring S, dessen homomorphes Bild R ist, zu berechnen sind. Allerdings muss dann die Theorie der kanonischen Moduln herangezogen werden. Für genaue Details zu dieser Theorie sei auf [BH98, Kapitel 3] verwiesen. Ein endlich erzeugter R-Modul ω ist ein kanonischer Modul, falls gilt:

$$\mu^i_R(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq dim\, R, \\ 1 & \text{für } i = dim\, R. \end{cases}$$

Dabei stellt sich heraus, dass für einen Gorenstein-Ring S gilt, dass S selbst einen kanonischen Modul bildet und der lokale Cohen-Macaulay Ring R besitzt genau dann einen kanonischen Modul ω, falls R homomorphes Bild eines lokalen Gorenstein-Ringes S ist. In diesem Fall gilt z.B. $\omega = Ext^{dim\, S - dim\, R}_S(R, S)$ (siehe [BH98, 3.3.7]). In diesem Fall gilt also wegen Korollar 2.4.8 gerade $H^{dim\, R}_{\mathfrak{m}} \cong D(\omega)$.

Satz 2.4.9. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein lokaler d-dimensionaler Cohen-Macaulay Ring mit kanonischem Modul ω_R. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt für alle $0 \leq i \leq d$:*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong D_R(Ext^{d-i}_R(M, \omega_R)).$$

Beweis. [ea07, Theorem 11.44]. □

Lokale Dualität lässt sich auch noch allgemeiner für beliebige lokale Ringe, die einen dualisierenden Komplex besitzen, formulieren (siehe z.B. [BW95]). Im kompletten Fall besteht dann der folgende Zusammenhang zwischen lokaler Dualität und den Bass-Zahlen.

Lemma 2.4.10. *Sei R ein kompletter lokaler Ring und M ein R-Modul. Dann sind äqivalent:*

(i) M erfüllt das lokale Dualitätstheorem.

(ii) Die Bass-Zahlen $\mu^i(\mathfrak{m}, M)$ sind für alle i endlich.

Beweis. [BW95, Theorem 2]. □

In den obigen Versionen von lokaler Dualität funktioniert diese nur, falls für einen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ die lokalen Kohomologiemoduln mit Support in $\mathfrak{m}$ benutzt werden. Hellus konnte dies in [Hel07b] unter bestimmten Voraussetzungen auf eine weitaus größere Klasse von Support-Idealen verallgemeinern.

Satz 2.4.11. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, $h \in \mathbb{N}$, so dass*

$$H_I^l(R) \neq 0 \Longleftrightarrow l = h$$

gilt und sei M ein R-Modul. Dann gilt für jedes $i \in \{0, \ldots, h\}$:

$$D(H_I^{h-i}(M)) \cong Ext_R^i(M, D(H_I^h(R))).$$

Beweis. [Hel07b, Theorem 6.4.1]. □

Im kompletten Fall liefert uns Matlis-Dualität somit:

Korollar 2.4.12. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher kompletter lokaler Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, $h \in \mathbb{N}$, so dass*

$$H_I^l(R) \neq 0 \Longleftrightarrow l = h$$

gilt und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt für jedes $i \in \{0, \ldots, h\}$:

$$H_I^{h-i}(M) \cong D_R(Ext_R^i(M, D(H_I^h(R)))).$$

Beweis. Da R komplett ist und M endlich erzeugt, also noethersch, folgt die Behauptung durch Anwendung des Matlis-Funktors D auf die Aussage von Satz 2.4.11 und der Matlis-Dualität aus Theorem 2.2.34. □

Das nachfolgende Korollar zeigt nun, dass es sich bei dieser Aussage gerade um eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen lokalen Dualitätstheorems handelt.

Korollar 2.4.13. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher kompletter lokaler Cohen-Macaulay Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei außerdem $\omega_R := D(H_{\mathfrak{m}}^{dim(R)}(R))$. Dann gilt:*

$$H_{\mathfrak{m}}^{dim(R)-i}(M) \cong D(Ext_R^i(M, \omega_R)).$$

Beweis. [Hel07b, Remark 6.4.2] □

Kapitel 3

$\mathcal{F}$-Moduln

Im folgenden Teil wird der für unsere Arbeit grundlegende Begriff der $\mathcal{F}$-Moduln eingeführt. Wir werden dabei hauptsächlich die Notationen aus [Lyu97] und [Bli01] übernehmen. Unser Ziel ist es, die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln einzuführen, welche in gewisser Weise das Charakteristik-p-Analogon zu den holonomen $\mathcal{D}$-Moduln in Charakteristik Null darstellen, welche wir in Kapitel 6 näher betrachten werden. Wir werden mit der Definition des Frobenius-Funktors $\mathcal{F}$ beginnen, anschließend die $\mathcal{F}$-Moduln definieren und dann die Eigenschaften der lokalen Kohomologiemoduln als $\mathcal{F}$-Moduln untersuchen. Im Folgenden sei R ein kommutativer noetherscher Ring der Charakteristik $p > 0$. Insbesondere enthält R damit einen Körper $\Bbbk$, da R in diesem Fall gleichcharakteristisch ist (siehe Definition 4.3.4/[Hel09b, Bemerkung 3.2.21]).

3.1 Der Frobenius-Funktor

In positiver Charakteristik p ist eine Besonderheit, dass die Abbildung

$$\varphi:\ R \to R,\ r \mapsto r^p$$

ein Ringhomomorphismus ist. Sie wird ***Frobeniushomomorphismus*** genannt und versetzt uns in die Lage, R mit einer nichttrivialen R-Algebrastruktur zu versehen. In der Konstruktion des Frobenius-Funktors, der von Peskine und Szpiro erstmals in [PS73] eingeführt wurde, wird dies genutzt, um R selbst mit zwei unterschiedlichen R-Modulstrukturen zu versehen.

Sei dazu allgemein M ein R-Modul. Wir definieren einen R-Bimodul M^φ wie folgt: M^φ sei die abelsche Gruppe M und die Multiplikation sei gegeben durch:

- $R \times M^\varphi \to M^\varphi$
  $(r, m) \mapsto rm$
- $M^\varphi \times R \to M^\varphi$
  $(m, r) \mapsto r^p m$

Definition 3.1.1. *Der* ***Frobenius-Funktor*** $\mathcal{F}$: *R-mod* $\to$ *R-mod ist gegeben durch:*

$$\mathcal{F}(M) = R^\varphi \otimes_R M$$

$$\mathcal{F}(M \xrightarrow{f} N) = (R^\varphi \otimes_R M \xrightarrow{id \otimes_R f} R^\varphi \otimes_R N).$$

Für einen R-Modul M entsteht $\mathcal{F}(M)$ also durch Tensorieren von M mit R^φ aufgefasst als R-Rechtsmodul. Insbesondere gilt also $a \otimes bx = ab \otimes x = b^p a \otimes x$ für $a \in R^\varphi, b \in R$ und $x \in M$. Dabei erhält $\mathcal{F}(M)$ seine R-Modulstruktur durch die Links-R-Modulstruktur auf R^φ.

Die grundlegende Eigenschaft, die den Frobenius-Funktor zu einem so nützlichen Hilfsmittel macht, ist, dass ein Satz von Kunz in [Kun69] (siehe Satz 4.3.1) für einen regulären Ring R impliziert, dass $\mathcal{F}$ ein exakter Funktor ist. Sei also für den Rest dieses Kapitels R zusätzlich regulär. Betrachten wir nun die Eigenschaften von $\mathcal{F}$:

Bemerkung 3.1.2 (siehe Remarks 1.0 in [Lyu93]). *(i) $\mathcal{F}$ ist ein kovarianter additiver exakter Funktor in der Kategorie der R-Moduln.*

(ii) $\mathcal{F}$ vertauscht mit direkten Summen, d.h.

$$\mathcal{F}(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}(M_i),$$

wobei die $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln sind.

(iii) $\mathcal{F}$ vertauscht mit direkten Limites, es gilt also $\mathcal{F}(\varinjlim M_i) = \varinjlim \mathcal{F}(M_i)$.

(iv) Für R-Moduln N, M, wobei M endlich erzeugt ist und $i \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mathcal{F}(Ext^i_R(M, N)) \cong Ext^i_R(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)).$$

(v) $\mathcal{F}$ vertauscht mit der Kohomologie von Komplexen, d.h. für einen Komplex $M^\bullet$ von R-Moduln gilt

$$H^i(\mathcal{F}(M)) = \mathcal{F}(H^i(M)).$$

(vi) $\mathcal{F}$ vertauscht mit Lokalisierungen an einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S \subseteq R$, d.h. es gilt

$$\mathcal{F}(M)_S = \mathcal{F}(M_S)$$

für jeden R-Modul M.

Versuchen wir nun einmal einige spezielle Werte von $\mathcal{F}$ zu berechen und betrachten die folgenden Beispiele, die uns dann als Motivation für die Definition der $\mathcal{F}$-Moduln bzw. der Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln dienen werden.

Beispiel 3.1.3 (siehe Prop. 8.2.2 in [BH98]). *(i) Die Abbildung*

$$\theta : R \xrightarrow{r \mapsto r \otimes 1} R^\varphi \otimes_R R = \mathcal{F}(R).$$

ist ein Isomorphismus. Es gilt also $\mathcal{F}(R) = R$.

(ii) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Dann bezeichnen wir mit $I^{[p^e]}$ für $e \in \mathbb{N}$ das Ideal, das von den p^e-ten Potenzen von Elementen aus I erzeugt wird. Mit diesen Bezeichnungen ist die Abbildung

$$\vartheta : \mathcal{F}(I) = R^\varphi \otimes_R I \xrightarrow{r \otimes a \mapsto a^p r} I^{[p]}$$

ein Isomorphismus. Es gilt damit $\mathcal{F}(I) = I^{[p]}$.

(iii) Sei I ein Ideal von R, dann ist die Folge

$$0 \to I \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/I \to 0.$$

exakt. Da nun R^φ flach ist (siehe Satz 4.3.1) und damit $\mathcal{F}$ exakt, ist auch die Folge

$$0 \to \mathcal{F}(I) \hookrightarrow \mathcal{F}(R) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(R/I) \to 0$$

exakt. Wegen der Beispiele (i) und (ii) ist diese Folge aber gleich

$$0 \to I^{[p]} \hookrightarrow R \twoheadrightarrow \mathcal{F}(R/I) \to 0$$

und somit gilt $\mathcal{F}(R/I) = R/I^{[p]}$.

3.2 Definitionen

Huneke und Sharp konnten in [HS93] zeigen, dass die lokalen Kohomologiemoduln über einem regulären lokalen Ring positiver Charakteristik endliche Bass-Zahlen und nur endlich viele assoziierte Primideale besitzen (siehe Satz 1.2 aus der Einleitung). Dabei basiert ihr Beweis hauptsächlich auf dem Fakt, dass die lokalen Kohomologiemoduln isomorph zu ihrem Bild unter dem Frobenius-Funktor sind (siehe Abschnitt 3.3). Weiterhin haben wir in Abschnitt 2.1.2 gesehen, dass lokale Kohomologie als direkter Limes gewisser *Ext*-Funktoren ausgedrückt werden kann. Die $\mathcal{F}$-Moduln bzw. die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln sind nun die Verallgemeinerung dieser beiden Eigenschaften, wie wir in Abschnitt 3.3 und 3.5 sehen werden.

Definition 3.2.1 ($\mathcal{F}$-Modul)**.** *Ein $\mathcal{F}_R$-**Modul** ist ein Paar (M, θ), wobei M ein R-Modul ist und $\theta \in Hom_R(M, \mathcal{F}(M))$, so dass*

$$\theta : M \to \mathcal{F}(M) = R^\varphi \otimes_R M$$

*ein R-Modul-Isomorphismus ist, welcher **Strukturmorphismus** von M genannt wird. Wir bezeichnen M oft auch einfach als $\mathcal{F}$-Modul, wenn der zugrundeliegende Ring klar ist. Ein Homomorphismus von $\mathcal{F}$-Moduln ist ein R-Modulhomomorphismus $f : M \to M'$, so dass das folgende Diagramm kommutiert (dabei sei θ bzw. θ' der Strukturmorphismus von M bzw. M'):*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta'} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & M'. \end{array}$$

Mit Beispiel 3.1.3 ist also klar, dass R selbst ein $\mathcal{F}$-Modul ist. Wir wollen nun eine erste Eigenschaft der $\mathcal{F}$-Moduln kennenlernen.

Satz 3.2.2. *Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann gilt*

$$injdim\, \mathcal{M} \leq dim\, Supp\, \mathcal{M}.$$

Insbesondere ist damit $\mathcal{M}$ injektiv, falls $dim\, Supp\, \mathcal{M} = 0$ gilt.

Beweis. [Lyu97, Theorem 1.4]. □

Das wichtigste Konzept, dass Lyubeznik in [Lyu93] eingeführt hat, ist der Begriff des $\mathcal{F}$-endlichen Moduls. Dabei sind $\mathcal{F}$-endliche Moduln grob gesagt gerade solche Moduln, die aus einem einfachen Modul, genauer einem endlich erzeugten, durch eine vom Frobenius-Funktor $\mathcal{F}$ induzierte Limes-Bildung entstehen. Wir modellieren diese Situation mit Hilfe der folgenden Definition.

Definition 3.2.3 (erzeugender Morphismus). *Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann heißt ein R-Modulhomomorphismus $\beta : M \to \mathcal{F}(M)$ mit einem R-Modul M* ***erzeugender Morphismus*** *von $\mathcal{M}$, falls*

$$\mathcal{M} = \varinjlim(M \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\beta)} \mathcal{F}^2(M) \xrightarrow{\mathcal{F}^2(\beta)} \mathcal{F}^3(M) \xrightarrow{\mathcal{F}^3(\beta)} \dots)$$

gilt.

Da der Frobenius-Funktor mit direkten Limites kommutiert, ist klar, dass jeder Limes der obigen Gestalt automatisch ein $\mathcal{F}$-Modul ist. Ist der erste Term in dem direkten System sogar endlich erzeugt, so wollen wir den direkten Limes $\mathcal{F}$-endlich nennen.

Definition 3.2.4 ($\mathcal{F}$-endlich). *Ein $\mathcal{F}$-Modul $\mathcal{M}$ heißt* ***$\mathcal{F}$-endlich****, falls er einen erzeugenden Morphismus $\beta : M \to \mathcal{F}(M)$ besitzt mit einem endlich erzeugten Modul M.*

Ist insbesondere der erste Term im direkten System sogar selbst ein $\mathcal{F}$-Modul, so ist klar, dass der erzeugende Morphismus gerade der Strukturmorphismus dieses Moduls ist und das direkte System damit konstant nur aus diesem Modul besteht. Des Weiteren gilt damit also:

Bemerkung 3.2.5. *Sei M ein endlich erzeugter $\mathcal{F}$-Modul. Dann ist M auch $\mathcal{F}$-endlich. Zusammen mit Beispiel 3.1.3 ist insbesondere der Ring R selbst $\mathcal{F}$-endlich.*

Betrachten wir Beispiel 3.1.3 nochmals genauer, so sehen wir, dass für ein Ideal I von R, $\mathcal{F}(I) = I^{[p]}$ und $\mathcal{F}(R/I) = R/I^{[p]}$ gilt. Insbesondere ist I bzw. R/I im Allgemeinen kein $\mathcal{F}_R$-Modul. Allerdings existieren stattdessen immer noch die folgenden Abbildungen:

$$\iota : I^{[p]} = \mathcal{F}(I) \hookrightarrow I,$$

wobei die Abbildung durch die Inklusion $I^{[p]} \subseteq I$ induziert ist und die, durch eine Projektion gegebene, Abbildung

$$\pi : R/I^{[p]} = \mathcal{F}(R/I) \twoheadrightarrow R/I. \tag{3.1}$$

Dies motiviert nun die folgende Definition, wobei wir uns an der Notation eines $R[F]$-Moduls aus [Bli01] orientieren.

Definition 3.2.6 (Quasi-$\mathcal{F}$-Modul). *Ein* ***Quasi-$\mathcal{F}$-Modul*** *ist ein Paar (M, θ), wobei M ein R-Modul ist und θ eine R-lineare Abbildung*

$$\theta : \mathcal{F}(M) = R^{\varphi} \otimes_R M \to M,$$

welche ***Strukturmorphismus*** *von M genannt wird. Ein Homomorphismus zwischen zwei Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln (M, θ) und (M', θ') ist ein R-Modulhomomorphismus $f : M \to M'$, so dass das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta'} \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & M'. \end{array}$$

Insbesondere ist jeder $\mathcal{F}$-Modul (M, θ) auch Quasi-$\mathcal{F}$-Modul mit Strukturmorphismus θ^{-1}.

3.3 $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der lokalen Kohomologie

Wir kommen nun wieder zu unseren lokalen Kohomologiemoduln aus Kapitel 2 und wollen zeigen, dass diese Moduln in bestimmten Fällen gerade Beispiele für $\mathcal{F}$-Moduln liefern. Des Weiteren werden wir sehen, dass die verschiedenen Möglichkeiten lokale Kohomologie zu beschreiben (siehe Kapitel 2) auch verschiedene Möglichkeiten liefern, die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur auf $H^i_I(M)$ für einen $\mathcal{F}$-Modul M zu definieren. Es stellt sich aber heraus, dass jeweils dieselbe $\mathcal{F}$-Modul-Struktur induziert wird.

Satz 3.3.1. *Seien R ein regulärer Ring der Charakteristik $p > 0$, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann gibt es für jedes i einen Isomorphismus:*

$$\mathcal{F}(H^i_I(M)) = R^\varphi \otimes_R H^i_I(M) \cong H^i_I(M)$$

Beweis. Da R regulär ist, ist nach Korollar 4.3.2 der Frobeniushomomorphismus $\varphi : R \to R$ flach. Der Modul R^φ ist als R-Rechtsmodul gerade R aufgefasst als R-Modul via φ. Nach dem Satz über den flachen Basiswechsel der lokalen Kohomologie (siehe [BS08, 4.3.2]) gibt es somit einen Isomorphismus

$$\mathcal{F}(H^i_I(M)) = R^\varphi \otimes_R H^i_I(M) \xrightarrow{\cong} H^i_{\mathcal{F}(I)}(R^\varphi \otimes_R M) = H^i_{\mathcal{F}(I)}(\mathcal{F}(M)).$$

Nun ist M ein $\mathcal{F}$-Modul, also $\mathcal{F}(M) \cong M$ und nach Beispiel 3.1.3 $\mathcal{F}(I) = I^{[p]}$. Damit ist

$$\mathcal{F}(H^i_I(M)) = R^\varphi \otimes_R H^i_I(M) \xrightarrow{\cong} H^i_{I^{[p]}}(M)$$

und somit gilt, falls I von t Elementen erzeugt wird, $I^{tp} \subseteq I^{[p]} \subseteq I^p$, ergo $\sqrt{I^{[p]}} = \sqrt{I}$. Satz 2.1.9 impliziert nun die Behauptung. □

Alternativ können wir die Situation auch folgendermaßen beschreiben. Sei $E^\bullet$ eine injektive Auflösung von M. Dann ist $\mathcal{F}(M^\bullet)$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}(M)$ und damit auch von M, da M ein $\mathcal{F}$-Modul ist. Dies gilt, da $\mathcal{F}$ exakt ist und injektive Moduln in injektive überführt (siehe Lemma 4.6.5). Damit haben wir zwei Möglichkeiten die Moduln $H^i_I(M)$ zu berechnen:

$$H^i_I(M) = H^i(\Gamma_I(E^\bullet)) = H^i(\Gamma_I(\mathcal{F}(E^\bullet))).$$

Wegen der Flachheit des Frobeniushomomorphismus gilt $\mathcal{F}(\Gamma_I(E^\bullet)) = \Gamma_I(\mathcal{F}(E^\bullet))$ (siehe [BS08, 4.3.1], und damit $H^i_I(M) = H^i(\mathcal{F}(\Gamma_I(E^\bullet)))$. Bemerkung 3.1.2 liefert uns dann

$$H^i_I(M) = \mathcal{F}(H^i(\Gamma_I(E^\bullet))) = \mathcal{F}(H^i_I(M)).$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird besonders die lokale Kohomologie von R selbst von Interesse sein und die obige Konstruktion spezialisiert sich in diesem Fall zu der folgenden Aussage.

Korollar 3.3.2. *Sei R ein regulärer Ring der Charakteristik $p > 0$ und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann besitzen die Moduln*

$$H^i_I(R)$$

für jedes i eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur.

Beweis. Nach Beispiel 3.1.3 ist R ein $\mathcal{F}$-Modul. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.3.1. □

Andererseits haben wir in Abschnitt 2.1.4 gesehen, dass sich die lokalen Kohomologiemoduln auch mit Hilfe des Čech-Komplexes beschreiben lassen. Genauer hatte sich dort herausgestellt, dass der Modul $H_I^i(M)$ isomorph ist zum i-ten Kohomologiemodul des Komplexes

$$\check{\mathrm{C}}^{\bullet}(\mathbf{x};R)\otimes_R M.$$

Dabei ist $\mathbf{x}=x_1,\dots,x_c$ ein Erzeugendensystem von I und der Komplex hat die Gestalt

$$0\longrightarrow M\longrightarrow \bigoplus_{1\le i\le c} M_{x_i}\longrightarrow \bigoplus_{1\le i<j\le c} M_{x_ix_j}\longrightarrow\dots\longrightarrow M_{x_1\dots x_c}\longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

Die auftretenden Terme sind also sämtlich Lokalisierungen von M und die folgende Bemerkung zeigt, dass diese im Fall eines $\mathcal{F}$-Moduls M auch $\mathcal{F}$-Moduln sind.

Bemerkung 3.3.3. *[siehe Example 2.7 in [Bli01]] Sei $S\subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Dann besitzt die Lokalisierung $S^{-1}R=R_S$ eine natürliche $\mathcal{F}_R$-Modul-Struktur. Der Strukturmorphismus ist dabei gegeben durch*

$$\theta:\ S^{-1}R\to R^{\varphi}\otimes_R S^{-1}R,\quad r/s\mapsto rs^{p-1}\otimes 1/s.$$

Ist nun (M,θ) ein Quasi-$\mathcal{F}$-Modul so gilt einerseits (siehe z.B. [Hel09a, 1.4.7])

$$M_S=S^{-1}M=S^{-1}R\otimes_R M.$$

Da andererseits nach Bemerkung 3.1.2 der Frobenius-Funktor mit Lokalisierungen vertauscht, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(M) & \longrightarrow & S^{-1}\mathcal{F}(M)\\ \big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \big\downarrow{\scriptstyle\theta'}\\ M & \longrightarrow & S^{-1}M,\end{array}$$

und $S^{-1}M$ ist somit auch Quasi-$\mathcal{F}$-Modul, wobei der Strukturmorphismus θ' gegeben ist durch

$$\theta':\ R^{\varphi}\otimes_R S^{-1}M\xrightarrow{r\otimes\frac{m}{s}\mapsto\frac{r}{s^p}\theta(1\otimes m)} S^{-1}M$$

(siehe [Bli01, 2.2.1]). Ist M sogar ein $\mathcal{F}$-Modul, so ist die Lokalisierung M_S wieder ein $\mathcal{F}$-Modul. Insbesondere ist der Komplex (3.2) ein Komplex von (Quasi-)$\mathcal{F}$-Moduln, da die auftretenden Morphismen als Summen von Lokalisierungsabbildungen gerade (Quasi-)$\mathcal{F}$-Modulhomomorphismen sind.

Damit ist mit Bemerkung 3.1.2(v) klar, dass die Beschreibung der lokalen Kohomologie als Kohomologie des obigen Čech-Komplexes ebenfalls eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur auf den Moduln $H_I^i(M)$ liefert. Es stellt sich also die Frage, ob wir mit dieser Konstruktion dieselbe Struktur wie in Satz 3.3.1 erhalten.

Satz 3.3.4. *Sei M ein $\mathcal{F}$-Modul. Die durch Bemerkung 3.3.3 und den Komplex $\check{C}^{\bullet}(\mathbf{x};R)\otimes_R M$ induzierte $\mathcal{F}$-Modul-Struktur auf den lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(M)$ stimmt mit der durch Satz 3.3.1 gegebenen $\mathcal{F}$-Modul-Struktur überein.*

Beweis. [Lyu97, Proposition 1.8]. □

Starten wir bei der obigen Konstruktion mit einem Quasi-$\mathcal{F}$-Modul M, so sieht man, dass auch die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(M)$ Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln sind. Den Fall, dass M der Quasi-$\mathcal{F}$-Modul $R/\mathfrak{a}$ mit einem Ideal $\mathfrak{a}$ von R ist (siehe (3.1)), werden wir in Beispiel 4.8.2 noch genauer untersuchen.

3.4 Endlichkeitseigenschaften $\mathcal{F}$-endlicher Moduln

Wir wollen jetzt die grundlegenden Eigenschaften der $\mathcal{F}$-endlichen Moduln diskutieren. Dabei sei nochmal daran erinnert, dass der Ausgangspunkt für die Einführung der $\mathcal{F}$-endlichen Moduln durch Lyubeznik in [Lyu97] war, dass Huneke und Sharp in [HS93] zeigen konnten, dass die speziellen Eigenschaften der lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(R)$ eines regulären lokalen Ringes in Bezug auf den Frobenius-Funktor $\mathcal{F}$ gewisse Endlichkeitsbedingungen implizierten. Insbesondere die Endlichkeit der Menge der assoziierten Primideale und die Endlichkeit der Bass-Zahlen konnte so gezeigt werden. Es zeigt sich nun, dass die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln eine geeignete allgemeinere Klasse von Moduln darstellen, so dass diese Endlichkeitsbedingungen erfüllt bleiben.

Der entscheidene Begriff, der es Lyubeznik in [Lyu97] ermöglichte, zu zeigen, dass die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln viele gute Eigenschaften besitzen, ist der Begriff der Wurzel, welchen wir nun einführen wollen.

Definition 3.4.1 (Wurzel). *Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{F}$-Modul mit erzeugendem Morphismus $\beta : M \to \mathcal{F}(M)$. Ist β injektiv, so nennen wir M eine **Wurzel** von $\mathcal{M}$ und β heißt in diesem Fall **Wurzelmorphismus** von $\mathcal{M}$.*

Beispiel 3.4.2. *Jeder $\mathcal{F}$-Modul, der als R-Modul endlich erzeugt ist, besitzt sich selbst als Wurzel und sein Strukturmorphismus ist Wurzelmorphismus.*

Diese Definition lässt es nun zu, die entscheidenen Eigenschaften der $\mathcal{F}$-endlichen Moduln herzuleiten. Wir wollen an dieser Stelle kurz die wichtigsten Ergebnisse zusammenfassen. Weitere Details bzw. die fehlenden Beweise finden sich in [Lyu93, §2] und können dort nachgeschlagen werden.

Satz 3.4.3. *Die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln bilden eine volle abelsche Unterkategorie in der Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln ($\mathcal{F}$-mod). Wir bezeichnen diese als $\mathcal{F}_{finite}$. Sie ist abgeschlossen unter Bildung von Untermoduln, Quotienten und Erweiterungen, d.h. für eine gegebene kurze exakte Folge in der Kategorie $\mathcal{F}$-mod*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

ist M genau dann $\mathcal{F}$-endlich, wenn M' und M'' $\mathcal{F}$-endlich sind.

Beweis. [Lyu97, Theorem 2.8]. □

Satz 3.4.4. *Sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Dann ist M noethersch in der Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln. Er erfüllt also die aufsteigende Kettenbedingung (a.c.c.).*

Beweis. [Lyu97, Proposition 2.7]. □

Die Tatsache, dass die Moduln in der Kategorie $\mathcal{F}_{finite}$ noethersch sind, macht es möglich, die Standardaussagen über die Endlichkeit gewisser Invarianten von endlich erzeugten R-Moduln auf die größere Klasse der $\mathcal{F}$-endlichen Moduln zu übertragen. Insbesondere wird in [Lyu97] die Endlichkeit der Menge $Ass\, M$ und die Endlichkeit der Bass-Zahlen für einen $\mathcal{F}$-endlichen Modul M gezeigt.

Satz 3.4.5. *Sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Dann ist die Menge seiner assoziierten Primideale, also die Menge $Ass_R\, M$, endlich.*

Beweis. [Lyu97, Theorem 2.12]. □

Satz 3.4.6. *Sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Dann sind alle Bass-Zahlen $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ endlich.*

Beweis. [Lyu97, Theorem 2.11]. □

Als Hauptresultat in seiner Arbeit konnte Lyubeznik das folgende Resultat formulieren.

Satz 3.4.7. *Sei R eine endlich erzeugte Algebra über einem noetherschen regulären lokalen Ring $(S, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ der Charakteristik $p > 0$ und sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher R-Modul. Dann besitzt M endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln.*

Beweis. [Lyu97, Theorem 3.2]. □

Dieser Satz zeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen, die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln nicht nur noethersch sind, sondern wegen Lemma 4.1.6 außerdem auch artinsch. Wir werden diese Tatsache in Abschnitt 7.2 dazu nutzen, um zu zeigen, dass uns $\mathcal{F}$-endliche Moduln gerade $\mathcal{D}$-Moduln endlicher Länge liefern (siehe Satz 7.2.9).

3.5 $\mathcal{F}$-Endlichkeit von $H^i_I(R)$

In diesem Abschnitt wollen wir uns noch genauer mit der $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(M)$ für einen $\mathcal{F}$-Modul M befassen. Zu Beginn werden wir die Existenz erzeugender Morphismen für diese Moduln zeigen, woraus dann direkt die $\mathcal{F}$-Endlichkeit von $H^i_I(M)$ folgen wird, falls M als R-Modul endlich erzeugt ist. Für den Fall $M = R$ besitzen die lokalen Kohomologiemoduln also die Endlichkeitsbedingungen aus dem letzten Abschnitt und dies war ja gerade das, die Einführung der $\mathcal{F}$-Moduln motivierende, Ergebnis von Huneke und Sharp in [HS93] (siehe Satz 1.2). Lyubeznik gelang es in [Lyu93] die $\mathcal{F}$-Endlichkeit der lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(M)$ sogar für beliebige $\mathcal{F}$-endliche Moduln zu zeigen.

Da die $\mathcal{F}$-Endlichkeit eines R-Moduls M über die Beschreibung des Moduls als direkten Limes charakterisiert ist, erinnern wir zu Beginn an zwei der möglichen Beschreibungen der lokalen Kohomologie aus Kapitel 2.

Bemerkung 3.5.1 (siehe Satz 2.1.11/Satz 2.1.23)**.** *Sei $I \subseteq R$ ein Ideal von R und sei $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_c$ ein Erzeugendensystem von I. Dann gilt für alle $i \geq 0$ und jeden R-Modul M:*

(i) $H^i_I(M) \cong \varinjlim_t Ext^i_R(R/I^t, M)$.

(ii) $H^i_I(M) \cong \varinjlim_t H^i(Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}^t; R), M))$.

Da der Ring R Charakteristik $p > 0$ besitzt und regulär ist, gilt nach [ea07, Remark 7.9] und Bemerkung 3.1.2 für einen $\mathcal{F}$-Modul M aber:

(i)
$$\varinjlim_t Ext^i_R(R/I^t, M) = \varinjlim_t Ext^i_R(R/I^{[p^t]}, M) \cong \varinjlim_t \mathcal{F}(Ext^i_R(R/I, M)).$$

(ii)
$$\begin{aligned} \varinjlim_t H^i(Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}^t; R), M)) &= \varinjlim_t H^i(Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}^{p^t}; R), M)) \\ &\cong \varinjlim_t \mathcal{F}(H^i(Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}; R), M))). \end{aligned}$$

Sei also M ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann ist mit der letzten Bemerkung klar, wie wir für den $\mathcal{F}$-Modul $H^i_I(M)$ erzeugende Morphismen konstruieren können. Dabei ist zu beachten, dass der Koszul-Komplex $K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)$ zu sich selbst dual ist, d.h es gilt $K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)[-c] \cong Hom_R(K^\bullet(\mathbf{x}^t; R), M)$ (siehe Satz 2.1.28).

Satz 3.5.2. *Sei $I \subset R$ ein Ideal, (M, θ) ein $\mathcal{F}$-Modul und sei $H^i_I(M)$ der i-te lokale Kohomologiemodul von M mit der $\mathcal{F}$-Modul-Struktur aus Satz 3.3.1. Dann gilt:*

(i) Der R-Modulhomomorphismus

$$\beta : Ext^i_R(R/I, M) \longrightarrow \mathcal{F}(Ext^i_R(R/I, M)) = Ext^i_R(\mathcal{F}(R/I), \mathcal{F}(M)),$$

induziert durch die Abbildungen

$$\theta : M \to \mathcal{F}(M) \qquad und \qquad \mathcal{F}(R/I) = R^\varphi \otimes_R (R/I) \xrightarrow{r' \otimes r \mapsto r^p r'} R/I,$$

ist ein erzeugender Morphismus von $H^i_I(M)$.

(ii) Sei $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_c$ ein Erzeugendensystem von I und sei $K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)$ der Koszul-Komplex von M bzgl. $\mathbf{x}^t$ (siehe Definition 2.1.14). Dann ist der R-Homomorphismus

$$\beta : H^i(K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)) \longrightarrow \mathcal{F}(K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)) = H^i(\mathcal{F}(K^\bullet(\mathbf{x}^t; M))),$$

induziert durch die Komplexabbildung

$$\beta^\bullet : K^\bullet(\mathbf{x}^t; M) \longrightarrow \mathcal{F}(K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)) = K^\bullet(\mathbf{x}^{\mathbf{p}t}; M),$$

ein erzeugender Morphismus von $H^i_I(M)$.

Beweis. [Lyu97, Proposition 1.11]. □

Bemerkung 3.5.3. *Sei M als R-Modul endlich erzeugt, so sind auch die Moduln $Ext^i_R(R/I, M)$ endlich erzeugt. Außerdem sind in diesem Fall alle Moduln des Koszul-Komplexes $K^\bullet(\mathbf{x}^t; M)$ als endliche direkte Summen von M endlich erzeugt. Somit sind also auch die Kohomologiemoduln $H^i(K^\bullet(\mathbf{x}^t; M))$ endlich erzeugt.*

Damit sehen wir, dass die lokalen Kohomologiemoduln von $\mathcal{F}$-Moduln, welche endlich erzeugte R-Moduln sind, $\mathcal{F}$-endlich sind.

Satz 3.5.4. *Sei M ein $\mathcal{F}$-Modul, der als R-Modul endlich erzeugt ist und sei $I \subset R$ ein Ideal. Dann sind die lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(M)$ mit der induzierten $\mathcal{F}$-Modul-Struktur (siehe Satz 3.3.1) $\mathcal{F}$-endlich.*

Beweis. Wegen Satz 3.5.2 existiert ein erzeugender Morphismus

$$\beta : Ext^i_R(R/I, M) \longrightarrow \mathcal{F}(Ext^i_R(R/I, M))$$

von $H^i_I(M)$. Da M aber endlich erzeugt ist, ist auch $Ext^i_R(R/I, M)$ endlich erzeugt und M somit nach Definition $\mathcal{F}$-endlich. □

Da der Ring R selbst endlich erzeugt ist als R-Modul und nach Satz 3.1.3 außerdem $\mathcal{F}$-Modul ist, gilt:

Korollar 3.5.5. *Die Moduln $H^i_I(R)$ sind $\mathcal{F}$-endlich.* □

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass nicht nur die lokalen Kohomologiemoduln von, über R endlich erzeugten $\mathcal{F}$-Moduln, $\mathcal{F}$-endlich sind, sondern sogar alle Moduln der Form $H^i_I(M)$ mit einem $\mathcal{F}$-endlichen Modul M. Um dies zu erreichen, sei zu Beginn an die folgende Möglichkeit erinnert, die lokalen Kohomologiemoduln zu definieren.

In Abschnitt 2.1.4 haben wir gesehen, dass der Modul $H^i_I(M)$ für einen R-Modul M isomorph zum i-ten Kohomologiemodul des Čech-Komplexes ist. Ist $x_1, \ldots, x_c$ ein Erzeugendensystem des Ideals I, so hat dieser die Gestalt

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq c} M_{x_i} \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i < j \leq c} M_{x_i x_j} \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_{x_1 \ldots x_c} \longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

Die im Komplex auftretenden Moduln sind sämtlich endliche direkte Summen von Lokalisierungen von M. Damit kommen wir mit dem folgenden Satz unserem Ziel ein großes Stück näher.

Satz 3.5.6. *Sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul und $f \in R$. Dann ist auch die Lokalisierung M_f mit der $\mathcal{F}$-Modul-Struktur aus Bemerkung 3.3.3 $\mathcal{F}$-endlich.*

Beweis. [Lyu97, Proposition 2.9]. □

Damit können wir das Folgende formulieren:

Satz 3.5.7 (Proposition 2.10 in [Lyu97])**.** *Sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher R-Modul und $I \subset R$ ein Ideal. Dann sind die lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(M)$ mit der induzierten $\mathcal{F}$-Modul-Struktur (siehe Satz 3.3.1) $\mathcal{F}$-endlich.*

Beweis. Die lokalen Kohomologiemoduln lassen sich als die Kohomologiemoduln des Komplexes (3.3) berechnen und alle im Komplex auftretenden Moduln sind nach Satz 3.5.6 $\mathcal{F}$-endlich. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.4.3. □

An dieser Stelle sei an folgenden Satz, der von Huneke und Sharp in [HS93] formuliert wurde, erinnert.

Satz 3.5.8 (Vgl. Theorem 3.5 in [HS93])**.** *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei M ein R-Modul, für den gilt, dass*

(i) $\mathcal{F}(M) \cong M$, und

(ii) $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ endlich ist für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Sei außerdem

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

die minimale injektive Auflösung von M.
Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $d^i|_{\Gamma_{\mathfrak{m}}(E^i)}$ von d^i auf den Untermodul $\Gamma_{\mathfrak{m}}(E^i)$ von E^i gleich Null. Insbesondere ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ der lokale Kohomologiemodul $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ ein injektiver R-Modul und $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ ist injektiver direkter Summand von M.

Beweis. [HS93, Theorem 3.5]. □

Wir sehen also, dass in den Voraussetzungen des Satzes gerade ein $\mathcal{F}$-Modul gefordert wird, dessen Bass-Zahlen alle endlich sind. Nach Satz 3.4.6 erfüllen die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln diese Voraussetzungen und wir sind damit in der Lage, Huneke und Sharp in [HS93] folgend, die anschließenden Aussagen zu formulieren.

Korollar 3.5.9. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, und sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher $\mathfrak{m}$-Torsionsmodul. Dann ist M ein injektiver R-Modul.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist M $\mathcal{F}$-endlich, also gilt nach Definition eines $\mathcal{F}$-Moduls einerseits $\mathcal{F}(M) \cong M$ und andererseits gilt nach Satz 3.4.6, dass alle Bass-Zahlen $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ endlich sind. Damit folgt aus Satz 3.5.8, dass $\Gamma_\mathfrak{m}(M)$ injektiv ist. Nun ist aber M von $\mathfrak{m}$-Torsion und somit $M = \Gamma_\mathfrak{m}(M)$. □

Korollar 3.5.10. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Dann sind die lokalen Kohomologiemoduln $H^i_\mathfrak{m}(M)$ injektiv.*

Beweis. Nach Korollar 3.5.7 sind die Moduln $H^i_\mathfrak{m}(M)$ $\mathcal{F}$-endlich und außerdem nach Definition auch $\mathfrak{m}$-Torsionsmoduln. Damit folgt die Behauptung aus dem letzten Korollar. □

Kapitel 4

Die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur von $D(H_I^i(R))$

Das Hauptergebnis in diesem Abschnitt wird der folgende Satz sein (siehe Korollar 4.6.6):

Satz 4.1. *Sei* $(R, \mathfrak{m})$ *ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik* $p > 0$*, der seinen perfekten Residuenkörper* $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ *enthält. Dann gibt es einen natürlichen und funktoriellen Isomorphismus:*

$$D(\mathcal{F}(M)) = D(R^{\varphi} \otimes M) \;\cong\; R^{\varphi} \otimes D(M) = \mathcal{F}(D(M)).$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass M ein $\mathcal{F}$-Modul ist, also $M \cong \mathcal{F}(M)$, erhalten wir einen Isomorphismus

$$D(M) \cong D(\mathcal{F}(M)) \cong\; R^{\varphi} \otimes D(M) = \mathcal{F}(D(M)).$$

Somit können wir erreichen, dass die Matlis-Duale von $\mathcal{F}$-Moduln wieder $\mathcal{F}$-Moduln sind. Insbesondere tragen die Moduln $D(H_I^i(R))$ eine solche Struktur und wir können deshalb die Theorie der $\mathcal{F}$-Moduln auf sie anwenden. Wir haben in Kapitel 3 gesehen, dass $\mathcal{F}$-endliche Moduln nur endlich viele assoziierte Primideale besitzen (vgl. [Lyu97, Thm. 2.12.]). Andererseits haben Hellus in [Hel07b] oder auch Bahmanpour und Naghipour in [BN08] einige Beispiele angegeben, die zeigen, dass die Moduln $D(H_I^i(R))$ im Allgemeinen unendlich viele assoziierte Primideale besitzen und somit im Allgemeinen nicht $\mathcal{F}$-endlich sind. In Charakteristik Null scheint das analoge Ergebniss zu sein, dass die Matlis-Duale der lokalen Kohomologiemoduln generell keine holonomen $\mathcal{D}$-Moduln sind. Dies wurde von Hellus in seiner Habilitationsschrift [Hel07b] beschrieben.

Sei also $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik p, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält, und $E = E(R/\mathfrak{m})$ sei die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$. Nun gilt:

$$D(H_I^i(R)) = Hom_R(H_I^i(R), E) \cong Hom_R(\mathcal{F}(H_I^i(R)), E) \cong Hom_R(R^{\varphi} \otimes H_I^i(R), E).$$

Dabei gilt die erste Isomorphie, da wir in Abschnitt 3.3 gesehen haben, dass die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(R)$ eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur besitzen, und somit $\mathcal{F}(H_I^i(R)) \cong H_I^i(R)$ gilt. Die Hom-Tensor-Adjungiertheit (siehe Lemma 4.4.1) liefert uns außerdem folgenden kanonischen Isomorphismus:

$$Hom_R(R^{\varphi} \otimes H_I^i(R), E) \cong Hom_R(R^{\varphi}, Hom_R(H_I^i(R), E)) = Hom_R(R^{\varphi}, D(H_I^i(R))).$$

Um unser Ziel zu erreichen, reicht es uns also zu zeigen, dass der Modul R^φ ein endlich erzeugter freier R-Modul ist, da dann gilt:

$$D(H_I^i(R)) \cong Hom_R(R^\varphi, D(H_I^i(R))) \cong R^\varphi \otimes Hom_R(H_I^i(R), E) = \mathcal{F}(D(H_I^i(R))).$$

4.1 Moduln endlicher Länge

Wir benötigen zu Beginn noch einige Definitionen und Aussagen über die Länge eines Moduls. In Kombination mit dem Nakayama-Lemma aus dem nächsten Abschnitt werden uns diese ermöglichen, zu entscheiden, ob und wann der Modul R^φ ein endlich erzeugter R-Modul ist. Wir beginnen mit der Definition einer Kompositionsreihe eines Moduls.

Definition 4.1.1 (Kompositionsreihe eines Moduls)**.** *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann heißt eine Folge*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

von Untermoduln von M ***Kompositionsreihe*** *von M, falls alle Faktoren M_i/M_{i+1} nichttriviale einfache Moduln sind. Die Zahl n heißt dann Länge der Kompositionsreihe.*

Falls der Modul M eine Kompositionsreihe besitzt, so stellt sich heraus, dass ihre Länge eine Invariante von M ist, d.h. sie ist unabhängig von der Wahl einer Kompositionsreihe. Genauer gilt:

Lemma 4.1.2. *Sei R ein Ring, M ein R-Modul und sei*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

eine Kompositionsreihe der Länge n von M. Sei außerdem

$$M = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \cdots \supsetneq N_s = 0$$

eine Folge von Untermoduln von M. Dann gilt:

(i) $s \leq n$

(ii) Die Folge $M = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \cdots \supsetneq N_s = 0$ kann zu einer Kompositionsreihe verfeinert werden.

Beweis. [Eis04, Theorem 2.13]. □

Damit ist die folgende Definition wohldefiniert.

Definition 4.1.3 (Länge eines Moduls)**.** *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Sei außerdem*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

eine Kompositionsreihe von M. Dann heißt die Länge n dieser Reihe auch ***Länge*** *von M und wird mit l(M) bezeichnet. Falls M keine Kompositionsreihe besitzt, so vereinbaren wir $l(M) = \infty$.*

Bemerkung 4.1.4. *Für einen Untermodul $N \subseteq M$ von M gilt:*

$$l(M) = l(N) + l(M/N).$$

Dies sieht man leicht, indem man das Urbild einer Kompositionsreihe von M/N unter der natürlichen Abbildung $\pi : M \to M/N$ betrachtet. Diese Reihe endet mit $\pi^{-1}(e) = N$ und bildet damit durch Anhängen der gegebenen Kompositionsreihe von N eine Kompositionsreihe von M. Zu beachten ist dabei, dass die entstehenden Faktoren wegen des zweiten Isomorphiesatzes gerade den ursprünglichen Faktoren entsprechen und somit wieder einfache Moduln sind.

Beispiel 4.1.5. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein lokaler noetherscher Ring. Betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden R-Moduln*

$$\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n \subseteq R/\mathfrak{m}^n,$$

so gilt nach der letzten Bemerkung und unter Benutzung des zweiten Isomorphiesatzes

$$l(R/\mathfrak{m}^n) = l(R/\mathfrak{m}^{n-1}) + l(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n).$$

Wir führen dies nun sukzessive fort und erhalten

$$l(R/\mathfrak{m}^n) = l(R/\mathfrak{m}) + l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + l(\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3) + \cdots + l(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n).$$

Nun ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt, da R noethersch ist und damit ist jedes der $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$. Ihre Untermoduln sind gerade ihre Untervektorräume und somit gilt $l(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = dim_{\Bbbk}\, \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} < \infty$. Insgesamt gilt also

$$l(R/\mathfrak{m}^n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 4.1.6. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul endlicher Länge. Dann ist M noethersch und artinsch und somit insbesondere endlich erzeugt.*

Beweis. [Eis04, Theorem 2.13]. □

4.2 Separierte Moduln und das Nakayama-Lemma

Wir werden im nächsten Schritt zeigen, dass der R-Modul R^{φ} für einen kompletten regulären lokalen Ring R, welcher seinen perfekten Residuenkörper $R/\mathfrak{m}$ enthält, sogar ein freier endlich erzeugter R-Modul ist. Als R-Linksmodul ist dies klar, es bleibt also die Rechtsmodulstruktur zu untersuchen. Wir werden dabei insbesondere das Nakayama-Lemma für komplette Ringe nutzen und müssen daher zu Beginn einige Aussagen zu Komplettierungen machen. Für eine umfangreichere Darstellung des Themas verweisen wir auf [Mat86, §8] oder [Hel09a, Abschnitt 3.2].

Definition 4.2.1 (Komplettierung)**.** *Sei R eine abelsche Gruppe und sei $R = \mathfrak{m}_0 \supseteq \mathfrak{m}_1 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge von Untergruppen von R. Dann ist die* ***Komplettierung von** R **bezüglich** $\mathfrak{m}_i$ definiert als der inverse Limes der Faktorgruppen $R/\mathfrak{m}_i$, also als*

$$\widehat{R} := \varprojlim R/\mathfrak{m}_i := \{(g_0, g_1, \dots) \in \prod_i R/\mathfrak{m}_i \mid g_j \equiv g_i (mod\, \mathfrak{m}_i)\, \forall j > i\}.$$

Bemerkung 4.2.2 (siehe Bemerkung 3.2.1 in [Hel09a])**.** *(i) Man hat einen kanonischen Gruppenhomomorphismus*

$$R \longrightarrow \widehat{R},\, r \mapsto (r + m_0, r + m_1, \dots).$$

(ii) Ist R ein Ring und sind die $\mathfrak{m}_i$ sämtlich Ideale von R, so sind alle $R/\mathfrak{m}_i$ Ringe und damit ist auch $\widehat{R}$ ein Ring. $R \longrightarrow \widehat{R}$ ist dann ein Ringhomomorphismus und für jedes i ist

$$\widehat{\mathfrak{m}}_i := \{(g_0, g_1, \dots) \in \widehat{R} \,|\, g_j = 0 \,\forall j \leq i\}$$

ein Ideal von $\widehat{R}$ mit $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}}_i = R/\mathfrak{m}$.

(iii) Ist R ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein Ideal von R, dann bildet $R \supseteq \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \dots$ eine absteigende Folge von Untergruppen von R und man nennt diese Folge $\mathfrak{m}$-adische Filtrierung von R. Die zugehörige Komplettierung heißt dann Komplettierung von R bezüglich $\mathfrak{m}$ und man schreibt $\widehat{R}_\mathfrak{m} := \widehat{R}$ und $\widehat{\mathfrak{m}} := \widehat{\mathfrak{m}}_1$. Diese Konstruktion bildet den wichtigsten Spezialfall von Komplettierungen.

(iv) Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal eines Ringes R, so ist $\widehat{R}_\mathfrak{m}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\widehat{\mathfrak{m}}$, da $\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{m}} = R/\mathfrak{m}$ und $\widehat{\mathfrak{m}}$ das einzige maximales Ideal von $\widehat{R}_\mathfrak{m}$ ist (siehe [Hel09a, 3.2.1]).

Definition 4.2.3 (kompletter Ring)**.** *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein Ideal. Dann heißt R **komplett bzgl.** $\mathfrak{m}$, falls die natürliche Abbildung $R \to \widehat{R}_\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, so ist R lokal, da $\widehat{R}_\mathfrak{m}$ lokal ist, und heißt dann **kompletter lokaler Ring**.*

Das folgende Beispiel zeigt, welche wichtige Beziehung zwischen Polynomringen und Potenzreihenringen besteht. Es stellt sich heraus, dass Potenzreihenringe gerade als Komplettierungen von Polynomringen auftauchen. Als weiteres wichtiges Beispiel wollen wir außerdem den, aus der Zahlentheorie bekannten, Ring der p-adischen Zahlen nennen, welcher als Komplettierung von $\mathbb{Z}$ an einem Primideal auftritt.

Beispiel 4.2.4 (siehe Bsp. 3.2.2 in [Hel09a])**.** *Sei $\Bbbk$ ein Körper und $R = \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über $\Bbbk$ in den Unbestimmten $X_1, \dots, X_n$. Dann gilt für das maximale Ideal $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$ von R*

$$\widehat{R}_\mathfrak{m} = R[[X_1, \dots, X_n]].$$

Der Potenzreihenring taucht also in natürlicher Weise als Komplettierung des Polynomringes auf. Insbesondere ist $\Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$ ein kompletter lokaler Ring.

Definition 4.2.5. *Sei R ein Ring, $\mathfrak{m} \subset R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Dann heißt*

$$\widehat{M} := \varprojlim M/\mathfrak{m}^i M$$

*die **Komplettierung von M bzgl.** $\mathfrak{m}$.*

Definition 4.2.6 (separierter Modul)**.** *Seien $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein Ideal des Ringes R und M ein R-Modul. M heißt **separiert** bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie, wenn $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^i M = 0$ ist.*

Wir sind jetzt in der Lage das Nakayama-Lemma für komplette Ringe zu formulieren und zu beweisen. Dabei sehen wir, dass die Aussage des gewöhnlichen Nakayama-Lemmas im kompletten Fall auch für nicht notwendigerweise endlich erzeugte Moduln richtig ist. Die Moduln müssen allerdings separiert sein. Die nötigen Aussagen über die Konvergenz von Folgen in Komplettierungen finden sich z.B. in [Hel09a, Abschnitt 3.2].

Satz 4.2.7 (Nakayama-Lemma für komplette Ringe)**.** *Seien R ein bezüglich eines Ideals $\mathfrak{m} \subseteq R$ kompletter Ring und M ein bezüglich $\mathfrak{m}$ separierter Modul. Seien außerdem $\omega_1, \ldots, \omega_n \in M$ mit*

$$M/\mathfrak{m}M = (\omega_1, \ldots, \omega_n)R/\mathfrak{m}$$

($M/\mathfrak{m}M$ ist also endlich erzeugt über $R/\mathfrak{m}$).
Dann gilt:

$$M = (\omega_1, \ldots, \omega_n)R.$$

M ist also auch als R-Modul endlich erzeugt.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $M = \sum R\omega_i + \mathfrak{m}M$ und damit auch $M = \sum R\omega_i + \mathfrak{m}(\sum R\omega_i + \mathfrak{m}M) = \sum R\omega_i + \mathfrak{m}^2 M$. Insgesamt ergibt sich $M = \sum R\omega_i + \mathfrak{m}^\nu M$ für alle $\nu > 0$. Sei nun $m \in M$. Dann können wir schreiben

$$m = \sum_i r_i \omega_i + a_1$$

mit geeigneten $r_i \in R$ und $a_1 \in \mathfrak{m}M$, also

$$a_1 = \sum_i r_{i,1}\omega_i + a_2$$

mit geeigneten $r_{i,1} \in \mathfrak{m}$ und $a_2 \in \mathfrak{m}^2 M$. Induktiv fortfahrend finden wir so $r_{i,\nu} \in \mathfrak{m}^\nu$ und $a_\nu \in \mathfrak{m}^\nu M$ mit

$$a_\nu = \sum_i r_{i,\nu}\omega_i + a_{\nu+1}.$$

Nun konvergiert für jedes i

$$r_i + r_{i,1} + r_{i,2} + \ldots$$

gegen ein $b_i \in R$ und es gilt somit

$$m - \sum_i b_i \omega_i \in \bigcap_\nu \mathfrak{m}^\nu M = 0.$$

□

Wir wollen jetzt eine ganz ähnliche Situation betrachten, allerdings sei der Ring R diesmal lokal und zusätzlich M ein flacher R-Modul. Insbesondere zeigt sich dann, dass für einen lokalen Ring auch die Umkehrung der Aussage, dass jeder freie Modul flach ist, richtig ist.

Satz 4.2.8. *Seien $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein lokaler Ring und M ein flacher R-Modul und seien $x_1, \ldots, x_n \in M$. Ist die Folge*

$$(x_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, x_n + \mathfrak{m}M)$$

in $M/\mathfrak{m}M$ linear unabhängig über $R/\mathfrak{m}$, so ist die Folge

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

in M linear unabhängig über R. Insbesondere gilt: Ist zusätzlich M endlich erzeugt, so ist jedes minimale Erzeugendensystem von M eine Basis von M und insbesondere ist M frei.

Beweis. [Hel09a, Satz 3.1.17]. □

Wir geben an dieser Stelle noch eine Definition an, die wir an späterer Stelle verwenden werden.

Definition 4.2.9. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann heißt M **von endlicher Darstellung**, falls es eine exakte Folge*

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$ gibt.

Ein R-Modul von endlicher Darstellung ist auch endlich erzeugt. Ist der Ring R sogar noethersch, so gilt die Umkehrung ebenfalls (siehe [Hel09a, 3.1.18]).

4.3 Ein Satz von Kunz - Flachheit von R^φ

In seiner Arbeit [Kun69] hat Kunz einen fundamentalen Satz über die Charakterisierung regulärer Ringe der Charakteristik $p > 0$ bewiesen.

Satz 4.3.1. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$.*
Dann sind äquivalent:

(i) R ist regulär

(ii) R ist reduziert und ein flacher R^p-Modul.

Beweis. [Kun69, Theorem 2.1]. □

Da Flachheit eine lokale Eigenschaft ist (siehe [Hel09a, 3.1.3]) und der Frobenius-Funktor $\mathcal{F}$ mit Lokalisierungen vertauscht (siehe Bemerkung 3.1.2) lässt sich allgemeiner auch Folgendes formulieren.

Korollar 4.3.2. *Sei R ein regulärer Ring der Charakteristik $p > 0$. Dann ist R^φ eine flache R-Algebra. Äquivalent dazu ist es zu sagen, dass der Frobenius-Funktor $\mathcal{F}$ exakt ist.*

Beweis. [BH98, Corollary 8.2.8]. □

Wir können nun mit Hilfe des kompletten Nakayama-Lemmas zeigen, dass über einem lokalen, kompletten Ring R der Charakteristik $p > 0$ gilt, dass R als R^p-Modul endlich erzeugt ist. Ist R darüber hinaus sogar regulär, so können wir den Satz von Kunz benutzen um zu zeigen, dass R als R^p-Modul sogar frei ist.

Satz 4.3.3. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei $\Bbbk \subseteq R$ perfekt. Dann ist R als R^p-Modul endlich erzeugt.*

Beweis. (Vgl. [HS77, Proposition 1.1]) Wir bemerken zu Beginn, dass R als R^p-Modul das Gleiche ist wie R aufgefasst als R-Modul via des Frobeniushomomorphismus φ. Wir bezeichnen R mit dieser R-Modulstruktur als $R^{\varphi(R)}$. Nun gilt $R^{\varphi(R)}/\mathfrak{m}R^{\varphi(R)} = (R/\mathfrak{m}^p)^{\varphi(R)}$ und da R komplett ist, also $R \cong \widehat{R}$, gilt damit $\widehat{R^{\varphi(R)}} \cong \widehat{R}^{\varphi(R)} \cong R^{\varphi(R)}$. Damit ist $R^{\varphi(R)}$ also komplett und separiert bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie. Außerdem ist $R^{\varphi(R)}/\mathfrak{m}R^{\varphi(R)} = (R/\mathfrak{m}^p)^{\varphi(R)}$ ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum, welcher nach Beispiel 4.1.5 endliche Länge besitzt und somit endlich erzeugt ist. Damit ist aber nach Satz 4.2.7 auch $R^{\varphi(R)}$ endlich erzeugt über R und somit R endlich über $\varphi(R) = R^p$. □

Wir wollen an dieser Stelle noch einen weiteren Beweis dieser Tatsache nennen, der auf einem wichtigen Struktursatz für komplette lokale Ringe von Cohen basiert. Wir definieren und bemerken dazu das Folgende:

Definition 4.3.4. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein lokaler Ring mit Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$. Dann heißt R* ***gleichcharakteristisch*** *falls $char\, R = char\, \Bbbk$ gilt. Andernfalls nennen wir R* ***gemischtcharakteristisch***.

Nun stellt sich heraus, dass ein lokaler Ring R genau dann gleichcharakteristisch ist, wenn er einen Teilkörper enthält (siehe [Hel09a, Bemerkung 3.2.21]). Damit sehen wir also, dass unser Ring R aus Satz 4.3.3 gleichcharakteristisch ist und der folgende Satz wird für uns anwendbar.

Satz 4.3.5. *[Cohen's Struktursatz] Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein noetherscher gleichcharakteristischer kompletter lokaler Ring mit Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$. Dann ist R homomorphes Bild eines Potenzreihenringes, genauer gilt:*

$$R \cong \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]/I \quad \textit{für ein } n \in \mathbb{N} \textit{ und ein Ideal } I.$$

Beweis. [Eis04, Theorem 7.7]. □

Es stellt sich also als äquivalent heraus, einen noetherschen kompletten lokalen Ring $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ der Charakteristik $p > 0$ vorauszusetzen oder einen noetherschen kompletten lokalen Ring $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$, der seinen Residuenkörper $\Bbbk$ von Charakteristik $p > 0$ enthält. Im ersten Fall gilt nämlich auch $char\, \Bbbk = p$ und R enthält somit nach dem letzten Satz einen zu $\Bbbk$ isomorphen Teilkörper. Weitere Details dazu finden sich z.B. in [Sin05, §7] oder auch in [Hel09a, Bemerkungen 3.2.21]. Die Forderung $\Bbbk \subseteq R$ in den kommenden Sätzen ist also nicht zwingend nötig. Wir werden sie aber trotzdem nennen, um darauf aufmerksam zu machen.

Sei nun wie in Satz 4.3.3 außerdem $\Bbbk$ perfekt, so gilt der folgende Satz und wir erhalten somit einen weiteren Beweis dafür, dass ein noetherscher kompletter lokaler Ring $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$, der seinen perfekten Residuenkörper enthält, als R^p-Modul endlich erzeugt ist.

Satz 4.3.6. *Sei $\Bbbk$ ein perfekter Körper, $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ ein Potenzreihenring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist*

$$S = R/I = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]/I$$

als S^p-Modul endlich erzeugt.

Beweis. Wir bemerken zu Beginn, dass es zu zeigen reicht, dass $S_1 = \Bbbk[[X]]$ endlich erzeugt ist über S_1^p, da damit induktiv folgt, dass auch $S_n = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ endlich erzeugt ist über S_n^p. Sei dann B ein endliches Erzeugendensystem von S_n über S_n^p, dann erzeugen die Bilder von B unter der natürlichen Abbildung $\pi : S_n \to S_n/I$ auch S_n/I über $(S_n/I)^p$ und wir haben unser Ziel erreicht. Nun gilt aber $\Bbbk^p = \Bbbk$, da $\Bbbk$ perfekt ist, und somit also auch $S_1^p = \Bbbk^p[[X^p]] = \Bbbk[[X^p]]$. Damit ist aber klar, dass die Elemente

$$1, X^1, X^2, \ldots, X^{p-2}, X^{p-1}$$

ein endliches Erzeugendensystem von S_1 über S_1^p bilden. □

Bemerkung 4.3.7. *In der Literatur wird ein noetherscher Ring R von Charakteristik $p > 0$, der als Modul über R^p endlich erzeugt ist, auch als F-endlicher Ring bezeichnet. Wir wollen diese verallgemeinerte Terminologie nicht benutzen, um Verwechslungen mit den $\mathcal{F}$-endlichen Moduln zu vermeiden. Nähere Informationen zur allgemeinen Theorie der F-endlichen Ringe finden sich z.B. in [Hoc07]. Es sei aber darauf hingewiesen, dass es sich bei den von uns behandelten Ringen, also den kompletten lokalen noetherschen Ringen $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ der Charakteristik $p > 0$ mit perfektem Residuenkörper $\Bbbk$, nach dem letzten Satz gerade um solche F-endlichen Ringe handelt. Insbesondere sind Quotienten des Potenzreihenringes, d.h. Ringe der Gestalt*

$$\mathbb{F}_q[[X_1, \ldots, X_n]]/I,$$

über einem endlichen Körper solche Ringe. Sie sollen uns als Standardbeispiel für mögliche Anwendungen unserer Theorie dienen. Der Potenzreihenring

$$\mathbb{F}_q[[X_1, \ldots, X_n]]$$

ist außerdem auch regulär und wir werden im Folgenden sehen, dass er damit noch weitere gute Eigenschaften besitzt.

Mit dem Satz von Kunz folgt nun:

Korollar 4.3.8. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei $\Bbbk \subseteq R$ perfekt. Dann ist R als R^p-Modul frei.*

Beweis. Nach Satz 4.3.3 und Satz 4.3.1 ist R aufgefasst als R-Modul via des Frobeniushomomorphismus ein endlich erzeugter flacher R-Modul und als solcher nach Satz 4.2.8 frei. Damit ist ist aber gerade R als R^p-Modul frei. □

Der Struktursatz von Cohen hat uns gezeigt, dass alle kompletten lokale Ringe, die gleichcharakteristisch sind, eine ganz ähnliche Struktur besitzen. Sie sind gerade Quotienten eines Potenzreihenringes. Nun ist der Potenzreihenring selbst sogar regulär und es stellt sich heraus, dass er im Grunde auch der einzige komplette reguläre lokale Ring ist, der einen Körper enthält.

Satz 4.3.9. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein noetherscher kompletter regulärer lokaler Ring der Dimension d mit Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$. Falls R einen Körper enthält, also falls R gleichcharakteristisch ist, dann gilt*

$$R \cong \Bbbk[[X_1, \ldots, X_d]].$$

Beweis. [Eis04, Prop. 10.16]. □

Wir sind nun in der Lage, die Frage zu beantworten, wann der Modul R^φ als R-Rechtsmodul endlich erzeugt ist und wann er darüber hinaus sogar frei ist. Es sei daran erinnert, dass der Rechtsmodul R^φ als Menge der Ring R ist, wobei dieser seine Rechtsmodulstruktur durch die vom Frobeniushomomorphismus φ induzierte Operation $(r', r) \mapsto \varphi(r)r' = r^p r'$ erhält. Dies wird uns dann die Konstruktion eines Isomorphismus $\mathcal{F}(D(H^m_I(R))) \cong D(H^m_I(R))$ im folgenden Abschnitt ermöglichen.

Korollar 4.3.10 (Vgl. Prop. 1.1 in [HS77]). *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ kompletter lokaler Ring und sei $\Bbbk \subseteq R$ perfekt. Dann gilt:*

(i) R^φ ist endlich erzeugter R-Modul.

(ii) Sei außerdem R noch regulär, so ist R^φ sogar freier R-Modul.

Beweis. Wir bemerken, dass die R-Modulstruktur von R^φ als Rechtsmodul gerade eine R^p-Modulstruktur von R ist. Die Behauptung (i) folgt somit aus Satz 4.3.3. Die Aussage (ii) ist dann eine direkte Folgerung aus dem Satz von Kunz und folgt mit Korollar 4.3.8. □

4.4 Basiswechsel

An dieser Stelle wollen wir noch kurz an die Basiswechsel-Formel erinnern, welche wir im nächsten Schritt benötigen, um unseren Isomorphismus $\mathcal{F}(D(H^i_I(R))) \cong D(H^i_I(R))$ zu konstruieren.

Lemma 4.4.1. *Seien R und S Ringe und sei P ein R-S-Bimodul. Sei außerdem M ein R-Modul und N ein S-Modul. Dann gilt:*

(i) $M \otimes_R P$ besitzt S-Modulstruktur.

(ii) Durch die Multiplikation $Hom_S(P, N) \times R \to Hom_S(P, N)$ mit $(\varphi, r) \mapsto \varphi r$, wobei $(\varphi r)(x) := \varphi(rx)$ für $x \in P$, wird $Hom_S(P, N)$ zu einem R-Modul.

(iii) $Hom_S(M \otimes_R P, N) \cong Hom_R(M, Hom_S(P, N))$.

Die Aussage (iii) wird oft als Hom-Tensor-Adjungiertheit bezeichnet.

Beweis. Die S-Modulstruktur auf $M \otimes_R P$ ist gegeben durch die Multiplikation $s \cdot (m \otimes p) := m \otimes (sp)$. Die Modulaxiome lassen sich damit leicht nachweisen. Um (ii) zu beweisen bemerken wir, dass diese Multiplikation wohldefiniert ist, da P ein R-S-Bimodul ist und somit $rx \in P$ für $x \in P$, $r \in R$ gilt.
Sei nun $\varphi \in Hom_S(M \otimes_R P, N)$. Dann ist die durch $m \mapsto (P \to N, p \mapsto \varphi(m \otimes p))$ definierte Abbildung $P \to N$ ein Element von $Hom_R(M, Hom_S(P, N))$. Die dadurch definierte Abbildung

$$Hom_S(M \otimes_R P, N) \xrightarrow{i_1} Hom_R(M, Hom_S(P, N))$$

ist S-linear. Umgekehrt ist für $\psi \in Hom_R(M, Hom_S(P, N))$ die durch $m \otimes p \mapsto (\psi(m))(p)$ induzierte Abbildung $M \otimes_R P \to N$ S-linear, also ein Element von $Hom_S(M \otimes_R P, N)$. Die dadurch gegebene Abbildung

$$Hom_R(M, Hom_S(P, N)) \xrightarrow{i_1} Hom_S(M \otimes_R P, N)$$

ist S-linear und die kanonischen Abbildungen i_1 und i_2 sind zueinander invers. Also ist insbesondere i_1 ein Isomorphismus und es gilt (iii). □

Korollar 4.4.2. *Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, M ein R-Modul und N ein S-Modul. Dann gilt:*

$$Hom_S(M \otimes_R S, N) \cong Hom_R(M, N^R).$$

Dabei bezeichne N^R den S-Modul N aufgefasst als R-Modul via φ.

Beweis. Wir können S durch die Multiplikation $r \cdot s := \varphi(r) \cdot s$ als R-S-Bimodul auffassen und erhalten somit nach Lemma 4.4.1(iii) $Hom_S(M \otimes_R S, N) \cong Hom_R(M, Hom_S(S, N))$. Dabei wird $Hom_S(S, N)$ einerseits als R-Modul aufgefasst, andererseits gilt $Hom_S(S, N) \cong N$ und damit die Behauptung. □

Wir können dieses Lemma jetzt auf den Frobeniushomomorphismus $\varphi : R \to R$ anwenden und erhalten folgenden Isomorphismus:

Korollar 4.4.3. *Seien $\varphi : R \to R$ der Frobeniushomomorphismus und M,N R-Moduln. Dann gilt:*

$$Hom_R(M \otimes_R R^\varphi, N) \cong Hom_R(M, N^\varphi)$$

Wobei die linke Menge Homomorphismen von Linksmoduln und die rechte Hom-Menge Homomorphismen von Rechtsmoduln enthält.

Beweis. Als Linksmodul gilt $R = R^\varphi$ und als Rechtsmodul ist N aufgefasst als R-Modul via φ, gerade N^φ ohne seine Linksmodulstruktur. Damit folgt die Behauptung aus dem letzten Korollar. □

Wir wollen nun noch auf die Kompabilität des Tensorprodukt mit der direkten Summenbildung aufmerksam machen und auf die daraus resultierenden Vertauschbarkeitsaussagen.

Bemerkung 4.4.4 (siehe Bemerkung 1.2.19 in [Hel09a])**.** *Seien R ein Ring und M,N,P R-Moduln. Dann gilt*

$$(M \oplus N) \otimes_R P \cong (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P).$$

Ist P ein endlicher freier R-Modul, also $P \cong R^k$, dann gilt insbesondere

(i) $Hom_R(P, N) \cong Hom_R(R^k, N) \cong N^k \cong (R \otimes_R N)^k \cong R^k \otimes_R N \cong P \otimes_R N$ *und*

(ii) $Hom_R(M, P \otimes_R N) \cong Hom_R(M, N^k) \cong (Hom_R(M, N))^k \cong P \otimes_R Hom_R(M, N)$.

4.5 Der Isomorphismus $\mathcal{F}(D(H^i_I(R))) \cong D(H^i_I(R))$

Es ist uns nun möglich zu zeigen, dass die Moduln $D(H^i_I(R))$ eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur besitzen. Allgemeiner gilt sogar, dass für einen $\mathcal{F}$-Modul M sein Matlis-Dual $D(M) = Hom(M, E)$ auch ein $\mathcal{F}$-Modul ist.

Satz 4.5.1. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält und sei M ein R-Modul. Dann gibt es einen Isomorphismus*

$$D(\mathcal{F}(M)) = Hom_R(R^\varphi \otimes M, E(R/\mathfrak{m})) \cong R^\varphi \otimes D(M) = \mathcal{F}(D(M)).$$

Beweis. Da R ein regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ ist, ist nach Satz 4.3.1 der Frobeniushomomorphismus $R \xrightarrow{\varphi} R$ flach und damit ist nach 4.3.10 R^φ also ein endlich erzeugter, freier R-Modul. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{F}(M)) &= Hom_R(\mathcal{F}(M), E(R/\mathfrak{m})) \\
&= Hom_R(R^\varphi \otimes M, E(R/\mathfrak{m})) \\
&\cong Hom_R(R^\varphi, Hom_R(M, E(R/\mathfrak{m}))) \\
&= Hom_R(R^\varphi, D(M)) \\
&\cong R^\varphi \otimes D(M) \\
&= \mathcal{F}(D(M))
\end{aligned}$$

Dabei gilt die erste Isomorphie wegen der Hom-Tensor-Adjungiertheit aus Lemma 4.4.1(iii). Die zweite Isomorphie gilt, da R^φ endlich und frei ist, nach Bemerkung 4.4.4. □

Korollar 4.5.2. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält und sei M ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann gibt es einen Isomorphismus:*

$$D(M) = Hom_R(M, E(R/\mathfrak{m})) \cong\ R^\varphi \otimes D(M) = \mathcal{F}(D(M)).$$

Insbesondere ist das Matlis-Dual $D(M)$ eines $\mathcal{F}$-Moduls M selbst wieder ein $\mathcal{F}$-Modul.

Beweis. Da M ein $\mathcal{F}$-Modul ist, gilt die Isomorphie $M \cong \mathcal{F}(M)$. Zusammen mit dem Isomorphismus aus Satz 4.5.1 liefert das die Behauptung. □

Damit können wir unser Hauptergebnis über die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der Matlis-Duale $D(H_I^i(M))$ mit einem $\mathcal{F}$-Modul M formulieren.

Korollar 4.5.3. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält und M ein $\mathcal{F}$-Modul. Sei außerdem $I \subset R$ ein Ideal und $i \in \mathbb{N}$. Dann besitzen die Matlis-Duale $D(H_I^i(M))$ eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur.*

Beweis. Nach Satz 3.3.1 sind die Moduln $H_I^i(M)$ $\mathcal{F}$-Moduln. Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.5.2. □

Korollar 4.5.4. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält. Sei außerdem $I \subset R$ ein Ideal und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Moduln $D(H_I^i(R))$, also die Matlis-Duale bestimmter lokaler Kohomologiemoduln, $\mathcal{F}$-Moduln.*

Beweis. Dies folgt aus dem letzten Korollar, da R als Modul über sich selbst ein $\mathcal{F}$-Modul ist. □

Wegen Satz 4.3.9 beschreibt dieses Korollar gerade die folgende Situation:

Beispiel 4.5.5. *Sei $\Bbbk$ ein perfekter Körper positiver Charakteristik und $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring über $\Bbbk$ in den Variablen $X_1 \ldots, X_n$ und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann besitzen die Moduln*

$$D(H_I^i(\Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]))$$

eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur.

4.6 $\mathcal{F}$-Modul-Struktur von $E_R(\Bbbk)$

Die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der Matlis-Duale $D(M)$ für beliebige $\mathcal{F}$-Moduln M liefert uns nun als Folgerung einen neuen Beweis für die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der injektiven Hülle des Residuenkörpers.

Lemma 4.6.1 (Prop. 11.3. in [ea07])**.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ regulärer lokaler Ring. Dann ist R ein Gorenstein-Ring.*

Beweis. Da R regulär ist, ist der Ring von endlicher globaler homologischer Dimension, d.h. es gilt

$$glob\,dim\,R = n < \infty.$$

Also ist $Ext^i_R(-, M) = 0$ für $i > n$ und beliebige R-Moduln M. Damit gilt aber auch $Ext^i_R(-, R) = 0$ für $i > n$ und das bedeutet $inj\,dim\,R < \infty$. □

Die folgende Bemerkung liefert uns nun als Folgerung den erwünschten Isomorphismus und somit einen ersten Beweis für die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der injektiven Hülle E eines regulären lokalen Ringes der Charakteristik $p > 0$.

Bemerkung 4.6.2. *In Abschnitt 2.3 haben wir gezeigt, dass im Falle eines Gorenstein-Ringes ein enger Zusammenhang zwischen der injektiven Hülle von $\Bbbk$ und einem gewissen lokalen Kohomologiemodul besteht. Genauer hatten wir gesehen, dass für einen lokalen Gorenstein-Ring $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ der Dimension d die lokale Dualität Folgendes liefert:*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(R) = \begin{cases} 0 & \textit{für } i \neq d, \\ E_R(\Bbbk) & \textit{für } i = d. \end{cases}$$

Korollar 4.6.3. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal, Gorenstein, d-dimensional und von positiver Charakteristik $p > 0$. Dann besitzt die injektive Hülle $E := E(R/\mathfrak{m})$ des Restklassenkörpers eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur. Es gilt also*

$$E \cong \mathcal{F}(E) = R^{\varphi} \otimes E.$$

Beweis. In Abschnitt 3.3 hatten wir gezeigt, dass die lokalen Kohomologiemoduln $H^j_I(R)$ $\mathcal{F}$-Moduln sind, d.h es existiert ein Isomorphismus $\mathcal{F}(H^j_I(R)) \cong H^j_I(R)$. Insbesondere gilt also auch $\mathcal{F}(H^d_{\mathfrak{m}}(R)) \cong H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ und somit wegen Bemerkung 4.6.2 auch $\mathcal{F}(E_R(\mathbb{K})) \cong E_R(\mathbb{K})$. □

Wir wollen dasselbe Ergebnis jetzt noch einmal aus Satz 4.5.1 folgern. Es sei daran erinnert, dass der einzige Unterschied darin besteht, dass wir jetzt einen kompletten Ring voraussetzen, der seinen perfekten Residuenkörper enthält. In diesem speziellen Fall erhalten wir also einen neuen einfacheren Beweis für die letzte Aussage.

Satz 4.6.4. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält. Dann besitzt die injektive Hülle $E := E(R/\mathfrak{m})$ eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur. Es gilt also*

$$E \cong \mathcal{F}(E) = R^{\varphi} \otimes E.$$

Beweis. Da der Ring R selbst ein $\mathcal{F}$-Modul ist (siehe Beispiel 3.1.3), gilt einerseits:

$$E \cong Hom_R(R, E) = D(R) \cong D(\mathcal{F}(R)).$$

Andererseits gilt:

$$\mathcal{F}(E) \cong \mathcal{F}(Hom_R(R, E)) = \mathcal{F}(D(R)).$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus Satz 4.5.1. □

An dieser Stelle wollen wir noch bemerken, dass sogar alle injektiven R-Moduln $\mathcal{F}$-Moduln sind.

Lemma 4.6.5. *Sei R ein Gorenstein-Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei I ein injektiver R-Modul. Dann gilt:*

$$\mathcal{F}(I) \cong I.$$

Insbesondere sind also alle injektiven R-Moduln auch $\mathcal{F}$-Moduln.

Beweis. [HS93, Proposition 1.5]. □

Wir können nun die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur der injektiven Hülle $E(R/\mathfrak{m})$ bzw. den Isomorphismus $E \cong \mathcal{F}(E)$ benutzen, um zu erreichen, dass die Isomorphismen aus Abschnitt 4.5 sogar funktoriell und natürlich werden.

Korollar 4.6.6. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält und sei M ein R-Modul. Dann gibt es einen natürlichen und funktoriellen Isomorphismus*

$$\tau : D(\mathcal{F}(M)) = Hom_R(R^\varphi \otimes M, E(R/\mathfrak{m})) \cong R^\varphi \otimes D(M) = \mathcal{F}(D(M)).$$

Beweis. Betrachten wir die natürliche Abbildung

$$\theta_M : \mathcal{F}(D(M)) = \mathcal{F}(Hom_R(M, E)) \to Hom_R(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(E)),$$

so können wir feststellen, dass dies wegen $E \cong \mathcal{F}(E)$ und Satz 4.5.1 ein Isomorphismus ist. Wir können die Isomorphie auch durch die folgende Gleichung angeben.

$$\begin{aligned} D(\mathcal{F}(M)) &= Hom_R(\mathcal{F}(M), E(R/\mathfrak{m})) \\ &\cong Hom_R(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(E(R/\mathfrak{m}))) \\ &= Hom_R(R^\varphi \otimes M, R^\varphi \otimes E(R/\mathfrak{m})) \\ &\cong Hom_R(M, R^\varphi \otimes E(R/\mathfrak{m}))) \\ &\cong R^\varphi \otimes Hom_R(M, E(R/\mathfrak{m})) \\ &= R^\varphi \otimes D(M) \\ &= \mathcal{F}(D(M)) \end{aligned}$$

Dabei gilt die erste Isomorphie wegen $E \cong \mathcal{F}(E)$, die zweite nach Korollar 4.4.3 und die dritte Isomorphie gilt, da R^φ endlich erzeugt und frei ist, nach Bemerkung 4.4.4. □

Verzichten wir auf die Perfektheit von $R/\mathfrak{m}$, so können wir zumindest noch für Moduln von endlicher Darstellung oder artinsche Moduln die Existenz eines solchen Isomorphismus zeigen.

Satz 4.6.7. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei M ein artinscher R-Modul oder ein R-Modul von endlicher Darstellung. Dann gibt es einen natürlichen und funktoriellen Isomorphismus*

$$\tau : D(\mathcal{F}(M)) \to \mathcal{F}(D(M)).$$

Beweis. Im Fall, dass M artinsch ist, folgt die Behauptung aus [Lyu97, Lemma 4.1]. Sei also M von endlicher Darstellung. Da R regulär ist folgt aus Satz 4.3.1, dass der Frobeniushomomorphismus flach ist. Damit folgt aus [Eis04, Prop. 2.10], dass die natürliche Abbildung

$$\theta_M : \mathcal{F}(D(M)) = \mathcal{F}(Hom_R(M, E)) \to Hom_R(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(E))$$

ein Isomorphismus ist. Da R auch lokal ist, ist er insbesondere Gorenstein und somit gilt nach Korollar 4.6.3 $E \cong \mathcal{F}(E)$. Eine Kombination dieser beiden Isomorphismen liefert die Behauptung. □

Zusammenfassend gilt also das Folgende:

Satz 4.6.8. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$. Dann gilt:*

(i) Sei M ein artinscher R-Modul oder von endlicher Darstellung. Dann gibt es einen funktoriellen Isomorphismus

$$\tau_M : D(\mathcal{F}(M)) \to \mathcal{F}(D(M)).$$

(ii) Ist $\Bbbk \subseteq R$ und perfekt, so ist die obige Abbildung τ_M für beliebige R-Moduln M ein funktorieller Isomorphismus.

Ist M insbesondere ein $\mathcal{F}$-Modul, so ist also $D(M)$ wieder ein $\mathcal{F}$-Modul.

Beweis. Die Aussage (i) folgt mit Satz 4.6.7 und (ii) mit Satz 4.6.7. □

4.7 Weitere Isomorphismen

Sei nun $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei $\Bbbk \subseteq R$ perfekt. Wir haben gerade gesehen, dass es dann eine natürliche Äquivalenz zwischen dem Funktor

$$D \circ \mathcal{F} : R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$$

und dem Funktor

$$\mathcal{F} \circ D : R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$$

gibt. Dies wollen wir jetzt benutzen, um noch weitere Isomorphismen abzuleiten. Insbesondere werden wir die Beschreibung der lokalen Kohomologiemoduln als direkten Limes von gewissen Ext-Moduln aus Kapitel 2 benutzen, um nochmals zu sehen, wie diese Moduln ihre $\mathcal{F}$-Modul-Struktur erhalten. Zu Beginn sei an die folgenden Eigenschaften des Frobenius-Funktors $\mathcal{F}$ aus Kapitel 3 erinnert.

Bemerkung 4.7.1. *[siehe Bemerkung 3.1.2] Für den Frobeniusfunktor $\mathcal{F} : R\text{-mod} \to R\text{-mod}$, $M \mapsto R^\varphi \otimes_R M$ gilt:*

(i) $\mathcal{F}$ vertauscht mit direkten Limites, es gilt also $\mathcal{F}(\varinjlim M_i) = \varinjlim \mathcal{F}(M_i)$.

(ii) Für R-Moduln N, M, wobei M endlich erzeugt ist, und $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{F}(Ext^i_R(M,N)) \cong Ext^i_R(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)).$$

(iii) Für ein Ideal $I \subseteq R$ gilt: $\mathcal{F}(R/I) \cong R/I^{[p]}$.

Diese Eigenschaften können wir mit Satz 2.1.11 kombinieren und erhalten eine weitere Konstruktion der $\mathcal{F}$-Modul-Struktur auf den Matlis-Dualen der lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(M)$ für einen $\mathcal{F}$-Modul M. Dabei wird insbesondere nochmals deutlich, wie die lokalen Kohomologiemoduln ihre $\mathcal{F}$-Modul-Struktur erhalten (Vgl. Abschnitt 3.3).

Korollar 4.7.2. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei $\Bbbk$ perfekt. Sei außerdem $I \subset R$ ein Ideal und M ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann gilt*

$$\mathcal{F}(D(H^i_I(M))) \cong D(\varinjlim_t Ext^i_R(R/(I^{[p^{t+1}]}, M))).$$

Insbesondere gilt also

$$\mathcal{F}(D(H^i_I(M))) \cong D(H^i_I(M)).$$

Beweis. Nach Satz 4.6.8 vertauscht der Frobeniusfunktor mit dem Matlis-Dual und nach Satz 2.1.11 gilt $H^i_I(M) \cong \varinjlim(Ext^i_R(R/I^t, M))$. Damit gilt aber

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(D(H^i_I(M))) &\cong \mathcal{F}(D(\varinjlim_t(Ext^i_R(R/I^t, M)))) \\
&\cong D(\mathcal{F}(\varinjlim_t(Ext^i_R(R/I^t, M)))) \\
&\cong D(\mathcal{F}(\varinjlim_t(Ext^i_R(R/I^{[p^t]}, M)))) \\
&\cong D(\varinjlim_t(\mathcal{F}(Ext^i_R(R/I^{[p^t]}, M)))) \\
&\cong D(\varinjlim_t(Ext^i_R(\mathcal{F}(R/I^{[p^t]}), \mathcal{F}(M)))) \\
&\cong D(\varinjlim_t(Ext^i_R(R/I^{[p^{t+1}]}, M))).
\end{aligned}$$

Dabei gelten die letzten Gleichungen, bzw. Isomorphismen, wegen Bemerkung 4.7.1 und der dritte Isomorphismus, also

$$\varinjlim_t(Ext^i_R(R/I^t, M)) \cong \varinjlim_t(Ext^i_R(R/I^{[p^t]}, M)),$$

gilt, da die Frobenius-Exponenten koendlich in den gewöhnlichen Idealpotenzen sind. Weitere Details zu diesem Argument finden sich in [ea07, Remark 7.9]. Der zweite Teil der Behauptung gilt, da

$$\varinjlim_t(Ext^i_R(R/(I^{[p+1]}, M))) \cong \varinjlim_t(Ext^i_R(R/I^{[p]}, M)).$$

□

Betrachtet man den letzten Beweis nochmals genauer, so sieht man, dass man auch die folgenden Isomorphismen hat.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(D(H_I^i(M))) &\cong \mathcal{F}(D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/I^t, M)))) \\ &\cong D(\mathcal{F}(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/I^t, M)))) \\ &\cong D(\varinjlim_t(\mathcal{F}(Ext_R^i(R/I^t, M)))) \\ &\cong D(\varinjlim_t(Ext_R^i(\mathcal{F}(R/I^t), \mathcal{F}(M)))) \\ &\cong D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/(I^t)^{[p]}, M))).\end{aligned}$$

Damit gilt also wegen des letzten Korollars

$$D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/(I^t)^{[p]}, M))) \cong D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/I^t, M))).$$

Ist nun $H_I^i(M))$ endlich erzeugt oder artinsch, so liefert uns die Matlis-Dualität das Folgende.

Korollar 4.7.3. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, und sei $\Bbbk$ perfekt. Sei außerdem $I \subset R$ ein Ideal und M ein $\mathcal{F}$-Modul, so dass $H_I^i(M)$ endlich erzeugt oder artinsch ist. Dann gilt*

$$\varinjlim_t(Ext_R^i(R/(I^t)^{[p]}, M)) \cong \varinjlim_t(Ext_R^i(R/I^t, M)).$$

Beweis. Wegen Korollar 4.7.2 und Bemerkung 4.7.1 gilt

$$D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/(I^t)^{[p]}, M))) \cong D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/I^t, M))).$$

Eine Anwendung des Matlis-Funktors D auf diese Gleichung liefert somit

$$D(D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/(I^t)^{[p]}, M)))) \cong D(D(\varinjlim_t(Ext_R^i(R/I^t, M))))$$

und die Behauptung folgt damit aus Satz 2.2.34, da die Argumente jeweils isomorph zu $H_I^i(M)$ sind (wegen $\varinjlim_t(Ext_R^i(R/(I^t)^{[p]}, M)) \cong \mathcal{F}(H_I^i(M)) \cong H_I^i(M)$). $\square$

Wir wollen nun noch eine Beschreibung der Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ als gewisse inverse Limites angeben. Insbesondere erhalten wir dadurch ein Beispiel für einen inversen Limes, der ein $\mathcal{F}$-Modul ist. Es sei daran erinnert, dass unser Ring $(R, \mathfrak{m})$ als regulärer lokaler Ring ein Gorenstein-Ring ist. Insbesondere wird damit die lokale Dualität aus Abschnitt 2.4 anwendbar und es gilt somit sogar für einen endlich erzeugten R-Modul M (siehe Satz 2.4.6)

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \cong D_R(Ext_R^{d-i}(M, R)).$$

Dabei sei d die Dimension von R. Wir können dies nun auf $M = R/I^k$ für ein Ideal $I \subseteq R$ und $k \in \mathbb{N}$ anwenden und erhalten somit

$$H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(R/I^k) \cong D_R(Ext_R^i(R/I^k, R)).$$

Wir bemerken nun außerdem, dass der Matlis-Funktor direkte Systeme in inverse Systeme überführt.

Bemerkung 4.7.4. *Sei R ein noetherscher Ring und $\{M_i, \varphi_j^i\}$ ein direktes System von R-Moduln. Dann gilt*

$$D(\varinjlim_i M_i) \cong \varprojlim_i D(M_i).$$

Dieser Isomorphismus existiert, da allgemein für den kontravarianten Hom-Funktor $Hom_R(-,N)$ für einen R-Modul N das Folgende gilt (siehe z.B. [Rot08, Prop. 5.26]

$$Hom_R(\varinjlim_i M_i, N) \cong \varprojlim_i Hom_R(M_i, N).$$

Wir können damit die folgende Beschreibung der Moduln $D(H_I^i(R))$ angeben.

Satz 4.7.5. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension d und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt*

(i)

$$D(H_I^i(R)) \cong \varprojlim_k (H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(R/I^k)).$$

(ii) Ist R außerdem komplett, $\operatorname{char} R = p > 0$ und $\Bbbk \subseteq R$ perfekt, dann gibt es einen Isomorphismus

$$\phi: \mathcal{F}(\varprojlim_k (H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(R/I^k))) \longrightarrow \varprojlim_k (H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(R/I^k)).$$

Insbesondere ist $\varprojlim_k (H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(R/I^k))$ also ein $\mathcal{F}$-Modul.

Beweis. Wegen der letzten Bemerkung und dem lokalen Dualitätstheorem haben wir

$$\begin{aligned} D(H_I^i(R)) &\cong D(\varinjlim_k (Ext_R^i(R/I^k, R))) \\ &\cong \varprojlim_k (D(Ext_R^i(R/I^k, R))) \\ &\cong \varprojlim_k (H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(R/I^k)), \end{aligned}$$

und damit also (i) gezeigt. Nach Korollar 4.7.2 haben wir einen Isomorphismus

$$\psi: D(H_I^i(R)) \longrightarrow \mathcal{F}(D(H_I^i(R))).$$

Zusammensetzen mit dem Isomorphismus aus (i) liefert die Behauptung. □

Dieses Ergebnis wurde schon von Hellus in [Hel07b] dazu benutzt, um diese speziellen Matlis-Duale in Charakteristik Null mit einer $\mathcal{D}$-Modul-Struktur zu versehen. Wir werden diese Konstruktion in Kapitel 6 noch genauer untersuchen. Andererseits werden wir in Kapitel 7 sehen, dass in positiver Charakteristik jeder $\mathcal{F}$-Modul auch eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzt. Dort können wir dann analog zu Hellus in [Hel07b] die obige Beschreibung der Moduln $D(H_I^i(R))$ benutzen, um die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur in Charakteristik $p > 0$ zu konstruieren. Insbesondere stellt sich dann heraus, dass die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur in positiver Charakteristik auf ganz ähnliche Art und Weise gegeben ist, wie in Charakteristik Null.

4.8 Verallgemeinertes Matlis-Dual für Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln

Wir haben in den letzten Abschnitten gesehen, dass der Matlis-Funktor $D : R\text{-mod} \to R\text{-mod}$ für einen kompletten lokalen Ring, der seinen perfekten Residuenkörper enthält, auch ein Funktor $D_{\mathcal{F}}$: $\mathcal{F}$-mod $\to$ $\mathcal{F}$-mod auf der Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln ist. Im Folgenden wollen wir dies noch weiter verallgemeinern und einen Funktor

$$\mathfrak{D} : \mathcal{QF}_{cofinite} \longrightarrow \mathcal{F}_{finite}$$

von der Kategorie der Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln (siehe Defininition 3.2.6), die als R-Moduln artinsch sind, in die Kategorie der $\mathcal{F}$-endlichen Moduln definieren. R sei dabei immer ein Ring der Charakteristik $p > 0$. Wir folgen dabei Blickle in [Bli01], der diesen Funktor konstruiert, um Dualitätsaussagen für Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln zu untersuchen. Er wurde schon von Lyubeznik in [Lyu97] definiert, um die Struktur von artinschen Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln zu untersuchen. Ist der Residuenkörper des kompletten regulären lokalen Ringes $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ perfekt, so erhalten wir sogar einen Funktor

$$\mathfrak{D} : \mathcal{QF}\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{F}\text{-mod}$$

Sei also $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei $(\mathcal{M}, \beta)$ ein Quasi-$\mathcal{F}$-Modul, der endlich erzeugt oder artinsch ist, oder $\Bbbk \subset R$ sei perfekt, dann liefert die Anwendung des Matlis-Funktors $D(-, E)$ auf den Strukturmorphismus von $\mathcal{M}$, zusammen mit dem Isomorphismus τ aus Satz 4.6.7 bzw. aus Satz 4.6.6 , falls $\Bbbk$ perfekt ist, eine Abbildung

$$\theta : D(\mathcal{M}) \xrightarrow{D(\beta)} D(\mathcal{F}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\tau_{\mathcal{M}}} \mathcal{F}(D(\mathcal{M})).$$

Damit können wir nun den folgenden Funktor definieren.

Definition 4.8.1. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring positiver Charakteristik mit $\Bbbk \subseteq R$ und sei $(\mathcal{M}, \beta)$ ein Quasi-$\mathcal{F}$-Modul (endlich erzeugt oder artinsch als R-Modul, falls $\Bbbk$ nicht perfekt). Sei $\gamma := \tau_{\mathcal{M}} \circ D(\beta)$. Dann ist*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{M}) := \varinjlim (D(\mathcal{M}) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{F}(D(\mathcal{M})) \xrightarrow{\mathcal{F}(\gamma)} \mathcal{F}^2(D(\mathcal{M})) \to \dots)$$

ein von γ erzeugter $\mathcal{F}$-Modul. Auf der genannten Klasse von Moduln (bzw. Ringen) definiert diese Konstruktion einen exakten Funktor.

Die Exaktheit ist dabei klar, da der Matlis-Funktor und die direkte Limesbildung exakte Funktoren sind. Ist der Modul $\mathcal{M}$ sogar ein $\mathcal{F}$-Modul, also γ ein Isomorphismus, so besteht das direkte System nur aus einem Objekt und es gilt dann $\mathfrak{D}(\mathcal{M}) = D(M)$. Falls $\mathcal{M}$ artinsch ist, so ist wegen der Matlis-Dualität (siehe Abschnitt 2.2.4) $D(\mathcal{M})$ endlich erzeugt und $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ ist sogar $\mathcal{F}$-endlich. Ist außerdem β noch surjektiv, so ist γ injektiv und damit $D(\mathcal{M})$ sogar eine Wurzel von $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$.

Wir wollen nun als wichtiges Beispiel das verallgemeinerte Matlis-Dual des obersten lokalen Kohomologiemoduls $H^d_{\mathfrak{m}}(R/I)$ eines Quotienten des kompletten regulären lokalen Ringes R untersuchen. Dabei ist zu beachten, dass $H^d_{\mathfrak{m}}(R/I)$ im Allgemeinen kein $\mathcal{F}_R$-Modul ist, uns das verallgemeinerte Matlis-Dual $\mathfrak{D}(H^d_{\mathfrak{m}}(R/I))$ jedoch einen $\mathcal{F}_R$-endlichen Modul liefern wird.

Beispiel 4.8.2. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ der Dimension n. Sei außerdem $I \subseteq R$ ein Ideal mit $\operatorname{height} I = n - d = c$ und $S := R/I$. Dann ist S ein Ring der Dimension d und der lokale Kohomologiemodul $H^i_\mathfrak{m}(S)$ ist als S-Modul nach Satz 3.3.2 sogar ein $\mathcal{F}_S$-Modul. Aufgefasst als R-Modul ist $H^i_\mathfrak{m}(S)$ allerdings im Allgemeinen kein $\mathcal{F}_R$-Modul mehr, sondern nur noch Quasi-$\mathcal{F}_R$-Modul mit dem Strukturmorphismus*

$$\beta : R^\varphi \otimes_R H^i_\mathfrak{m}(R/I) \to H^i_\mathfrak{m}(R/I).$$

Diese Abbildung ist äquivalent zu der von der Projektion $R/I^{[p]} \to R/I$ induzierten Abbildung unter der Identifikation von $R^\varphi \otimes_R H^i_\mathfrak{m}(R/I)$ mit $H^i_\mathfrak{m}(R/I^{[p]})$. Nach Definition ist $\mathfrak{D}(H^i_\mathfrak{m}(R/I))$ der Limes des direkten Systems

$$D(H^i_\mathfrak{m}(R/I)) \to D(H^i_\mathfrak{m}(R/I^{[p]})) \to D(H^i_\mathfrak{m}(R/I^{[p^2]})) \to \dots$$

Wir können nun die lokale Dualität für komplette, lokale Gorenstein-Ringe aus Bemerkung 2.4.7 benutzen, da R als regulärer lokaler Ring nach Lemma 4.6.1 ein Gorenstein-Ring ist. Wir erhalten einen Isomorphismus von direkten Systemen

$$\begin{array}{ccccccc}
D(H^i_\mathfrak{m}(R/I)) & \longrightarrow & D(H^i_\mathfrak{m}(R/I^{[p]})) & \longrightarrow & D(H^i_\mathfrak{m}(R/I^{[p^2]})) & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\
Ext^{n-i}_R(R/I, R) & \longrightarrow & Ext^{n-i}_R(R/I^{[p]}, R) & \longrightarrow & Ext^{n-i}_R(R/I^{[p^2]}, R) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Dabei sind die Abbildungen im unteren System auch von den natürlichen Projektionen induziert. Damit haben wir (siehe z.B [ea07, Remark 7.9] für die letzte Isomorphie)

$$\mathfrak{D}(H^i_\mathfrak{m}(R/I)) = \varinjlim_k D(H^i_\mathfrak{m}(R/I^{[p^k]}) \cong \varinjlim_k Ext^{n-i}_R(R/I^{[p^k]}, R) \cong \varinjlim_k Ext^{n-i}_R(R/I^k, R)$$

und können damit insgesamt folgendes Ergebnis formulieren.

Satz 4.8.3. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, wobei $\Bbbk \subseteq R$ perfekt ist und $\dim R = n$. Sei außerdem $I \subseteq R$ ein Ideal von R der Höhe $c = n - d$. Dann gilt*

$$\mathfrak{D}(H^i_\mathfrak{m}(R/I)) \cong H^{n-i}_I(R)$$

als $\mathcal{F}$-Moduln. Es gilt also insbesondere für den höchsten lokalen Kohomologiemodul

$$\mathfrak{D}(H^d_\mathfrak{m}(R/I)) \cong H^c_I(R).$$

Beweis. Nach Satz 2.1.11 gilt

$$\varinjlim_k Ext^{n-i}_R(R/I^k, R) \cong H^{n-i}_I(R)$$

und zusammen mit den obigen Beobachtungen folgt die Behauptung. □

Insbesondere sehen wir also noch einmal, dass für einen artinschen Quasi-$\mathcal{F}$-Modul M das verallgemeinerte Matlis-Dual $\mathfrak{D}(M)$ sogar einen $\mathcal{F}$-endlichen Modul liefert, da die Moduln $H^i_\mathfrak{m}(R/I)$ nach Satz 5.2.2 artinsch sind und der Modul $\mathfrak{D}(M) \cong H^{n-i}_I(R)$ nach Satz 3.5.5 $\mathcal{F}$-endlich. Die $\mathcal{F}$-Endlichkeit von $\mathfrak{D}(M)$ für einen Quasi-$\mathcal{F}$-Modul M ist also eine notwendige Bedingung dafür, dass M selbst artinsch ist. Damit lässt sich die Frage aus Abschnitt 5.2 — Wann ist ein lokaler Kohomologiemodul $H_I^i(M)$ artinsch? — auch in Fragen über die $\mathcal{F}$-Endlichkeit gewisser verallgemeinerter Matlis-Duale formulieren. Diesen Zusammenhang werden wir in Kapitel 8 nochmals aufgreifen, um einen Ausblick auf mögliche weitere Forschungsansätze in diesem Gebiet zu geben.

In Abschnitt 2.4 hatten wir eine Verallgemeinerung der lokalen Dualität besprochen, die von Hellus in [Hel07b] formuliert wurde. Wir wollen dies jetzt benutzen, um das verallgemeinerte Matlis-Dual $\mathfrak{D}$ in weiteren Fällen genauer untersuchen zu können. Im obigen Beispiel hatten wir die lokale Dualität benutzt, um Moduln der Form $\mathfrak{D}(H_\mathfrak{m}^i(R/I))$ genauer beschreiben zu können. Die von Hellus erlangten Ergebnisse können wir jetzt nutzen, um in Spezialfällen auch verallgemeinerte Matlis-Duale der Form $\mathfrak{D}(H_\mathfrak{a}^i(R/I))$ näher beschreiben zu können.

Satz 4.8.4. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ mit $\Bbbk \subseteq R$ perfekt und seien $I, \mathfrak{a} \subseteq R$ Ideale von R. Sei außerdem $h \in \mathbb{N}$, so dass $H_\mathfrak{a}^l(R) \neq 0 \Leftrightarrow l = h$. Dann gilt für $i \in \{0, \ldots, h\}$*

$$\mathfrak{D}(H_\mathfrak{a}^{h-i}(R/I)) \cong H_I^i(D(H_\mathfrak{a}^h(R))).$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt nach Satz 2.4.11

$$D(H_\mathfrak{a}^{h-i}(R/I^{[p^k]})) \cong Ext_R^i(R/I^{[p^k]}, D(H_\mathfrak{a}^h(R))).$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(H_\mathfrak{a}^{h-i}(R/I)) &\cong \varinjlim_k D(H_\mathfrak{a}^{h-i}(R/I^{[p^k]})) \\ &\cong \varinjlim_k Ext_R^i(R/I^{[p^k]}, D(H_\mathfrak{a}^h(R))) \\ &\cong H_I^i(D(H_\mathfrak{a}^h(R))).\end{aligned}$$

□

In [PS73] wurde von Peskine und Szpiro das folgende Resultat bewiesen:

Satz 4.8.5. *Sei R ein regulärer Integritätsbereich der Charakteristik $p > 0$ und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal von R, derart, dass $R/\mathfrak{a}$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist. Dann gilt*

$$H_\mathfrak{a}^i(R) = 0 \quad \textit{für } i \neq \textit{height}\,\mathfrak{a}.$$

Beweis. [PS73, Proposition III.4.1]. □

Wir können die beiden letzten Sätze nun kombinieren und das Folgende formulieren:

Satz 4.8.6. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ mit $\Bbbk \subseteq R$ perfekt und seien $I, \mathfrak{a} \subseteq R$ Ideale von R. Sei außerdem $R/\mathfrak{a}$ Cohen-Macaulay. Dann gilt für $i \in \{0, \ldots, \textit{height}\,\mathfrak{a}\}$*

$$\mathfrak{D}(H_\mathfrak{a}^{\textit{height}\,\mathfrak{a}-i}(R/I)) \cong H_I^i(D(H_\mathfrak{a}^{\textit{height}\,\mathfrak{a}}(R))).$$

Beweis. Da R regulär und lokal ist, ist er ein Cohen-Macaulay-Ring und ein Integritätsbereich (siehe [ea07, 11.3; 11.10] und [ea07, 8.18]), und somit gilt

$$height\,\mathfrak{a} = depth_R(\mathfrak{a}, R).$$

Es gilt also $H_{\mathfrak{a}}^{height\,\mathfrak{a}}(R) \neq 0$ und wegen Satz 4.8.5 gilt insgesamt sogar

$$H_{\mathfrak{a}}^i(R) \neq 0 \Longleftrightarrow i = height\,\mathfrak{a}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.8.4. □

Zum Ende dieses Abschnittes wollen wir einen Algorithmus besprechen, um zu bestimmen, ob $H_I^i(R) = 0$ gilt. Dieser Algorithmus wurde von Lyubeznik in [Lyu97] angegeben und das obige Beispiel gibt Anlass dazu, diesen noch einmal genauer zu betrachten.

Sei also R ein regulärer Ring von positiver Charakteristik p und $I \subseteq R$ ein Ideal. Wir haben oben gesehen, dass

$$H_I^i(R) = \varinjlim_n Ext_R^i(R/I^{[p^n]}, R)$$

gilt, wobei die Abbildungen zwischen den Ext-Moduln durch die Projektionen $R/I^{[p^{k+1}]} \to R/I^{[p^k]}$ induziert werden. Die Komposition dieser Abbildungen liefert uns R-Modulhomomorphismen

$$\beta_k : Ext_R^i(R/I, R) \to Ext_R^i(R/I^{[p^k]}).$$

Da nun R noethersch ist, wird die Folge $ker\,\beta_1 \subseteq ker\,\beta_2 \subseteq \ldots$ stationär und es gilt $ker\,\beta_r = ker\,\beta_{r+1}$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$H_I^i(R) = 0 \Longleftrightarrow ker\,\beta_r = Ext_R^i(R/I, R).$$

Sei nun R zusätzlich komplett und lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, dann gilt nach Beispiel 4.8.2

$$H_I^c(R) = 0 \Longleftrightarrow \mathfrak{D}(H_{\mathfrak{m}}^d(R/I)) = 0$$

und die rechte Seite verschwindet genau dann, wenn es ganz analog zu oben einen Homomorphismus

$$\alpha_k : D(H_{\mathfrak{m}}^d(R/I)) \to D(H_{\mathfrak{m}}^d(R/I^{[p^k]}))$$

gibt, der der Nullmorphismus ist. Wegen der Dualität ist dies aber äquivalent dazu, dass einer der Homomorphismen

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k : R^{\varphi^k} \otimes_R H_{\mathfrak{m}}^d(R/I) \cong H_{\mathfrak{m}}^d(R/I^{[p^k]}) &\to H_{\mathfrak{m}}^d(R/I) \\ r \otimes h &\mapsto r\varphi^k(h) \end{aligned}$$

gleich Null ist, was bedeutet, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die k-te Potenz des Frobeniushomomorphismus auf $H_{\mathfrak{m}}^d(R/I)$ der Nullmorphismus ist. Dies konnte von Lyubeznik noch weiter verallgemeinert werden, indem die lokale Dualität durch die einfachere Matlis-Dualität ersetzt wurde. Es gilt sogar das Folgende.

Satz 4.8.7. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring positiver Charakteristik p der Dimension n und sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt $H_I^i(R) = 0$ genau dann, wenn für genügend großes $k \in \mathbb{N}$ die k-te Frobeniusiteration*

$$\varphi^k : H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I) \to H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I)$$

gleich Null ist, also falls $\varphi^k = 0$ für $k \gg 0$ gilt.

Beweis. [ea07, Theorem 22.1]. □

Kapitel 5

Über die koassoziierten Primideale von $H_I^i(R)$

Im folgenden Kapitel wollen wir uns mit den assoziierten Primidealen der Matlis-Duale von lokalen Kohomologiemoduln, genauer mit der Menge $Ass_R\, D(H_I^i(R))$, beschäftigen. Wir werden damit beginnen, unser Interesse an diesen speziellen Idealen durch Beispiele zu motivieren und kommen zunächst zur Definition eines assoziierten Primideals.

Definition 5.1 (assoziierte Primideale)**.** *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann heißt ein Primideal $\mathfrak{p} \in Spec\, R$ **assoziiert zu M**, falls ein $m \in M$ existiert, so dass*

$$Ann_R(m) = \mathfrak{p}$$

gilt. Mit $Ass_R\, M$ bezeichnet man die Menge aller assoziierten Primideale von M.

Bemerkung 5.2. *Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $\mathfrak{p} \in Spec\, R$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{p} \in Ass_R\, M \Longleftrightarrow \exists\ R\text{-}Monomorphismus\ R/\mathfrak{p} \to M.$$

Ein wichtiges Konzept in der algebraischen Geometrie sind die sogenannten mengentheoretisch vollständigen Durchschnitte. Dabei handelt es sich grob gesagt um Varietäten V (im affinen oder projektiven Raum über einem Körper $\Bbbk$), die durch $codim(V)$ viele Gleichungen ausgeschnitten werden können. Im Allgemeinen wird die Anzahl der nötigen Gleichungen für eine durch ein Ideal I gegebene Varietät als arithmetischer Rang des Ideals bezeichnet. Es wird sich herausstellen, dass ein enger Zusammenhang zwischen dem arithmetischen Rang eines Ideals und regulären Folgen auf den Matlis-Dualen bestimmter lokaler Kohomologiemoduln besteht. Diese regulären Folgen stehen dann wiederum in Zusammenhang mit den assoziierten Primidealen dieser Kohomologiemoduln.

Definition 5.3 (mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt)**.** *Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Dann heißt I **mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt** genau dann, wenn I — bis auf Radikal — von genau $height(I)$ vielen Elementen erzeugt werden kann. Also genau dann, wenn gilt $ara(I) = height(I)$. Dabei bezeichnet $ara(I)$ den arithmetischen Rang von I, also die minimale Anzahl von Erzeugern — bis auf Radikal — von I, und $height(I)$ bezeichnet die Höhe des Ideals I.*

Bemerkung 5.4. *Nach dem verallgemeinerten Krullschen Hauptidealsatz gilt stets die Ungleichung $ara(I) \geq height(I)$ und außerdem wissen wir, dass für die lokale Kohomologie $H^k_I(R) = 0$ gelten muss für alle $k > ara(I)$ (siehe z.B. [Kun97, 5.4], [BS08, 3.3.3]).*

Damit haben wir also für ein Ideal I mit $height(I) = h$:

$$I \text{ ist mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt} \iff \exists r_1, \dots, r_h \in R : \sqrt{I} = \sqrt{(r_1, \dots, r_h)R}.$$

Beispiel 5.5. *Sei $\Bbbk$ ein Körper, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$, und bezeichne $\mathbb{P}^n_\Bbbk$ den n-dimensionalen projektiven Raum über $\Bbbk$. Betrachten wir dann die projektive, glatte Kurve C_d, definiert als das Bild unter der Abbildung*

$$\mathbb{P}^1_\Bbbk \to \mathbb{P}^3_\Bbbk,\ (u : v) \mapsto (u^d : u^{d-1}v : uv^{d-1} : v^d),$$

*so ist bekannt, dass C_3 mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt ist. Außerdem konnte gezeigt werden (siehe [Har79] oder auch in [BSR81]), dass im Falle $char\, \Bbbk > 0$ die Kurve C_d für alle $d \geq 3$ mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt ist. Im Falle $char\, \Bbbk = 0$ ist die Frage völlig offen, sogar für die Kurve C_4 ist ungeklärt, ob sie vollständiger Durchschnitt ist, oder nicht. C_4 ist die berühmte **Macaulay-Kurve**.*

Betrachten wir den Fall $ara(I) \leq 1$ (siehe [Hel05b, Einleitung], [Hel05a]). Als erstes stellen wir fest, dass dann notwendigerweise $0 = H^2_I(R) = H^3_I(R) = \dots$ gelten muss. Die umgekehrte Implikation ist im Allgemeinen aber falsch (siehe [HS07, 2.1] für ein Gegenbeispiel). Wir haben aber

$$ara(I) \leq 1 \iff 0 = H^2_I(R) = H^3_I(R) = \dots \text{ und } \exists f \in I : f \text{ operiert surjektiv auf } H^1_I(R)$$

und somit haben wir für ein Ideal I eines noetherschen lokalen Ringes $(R, \mathfrak{m})$ mit $0 = H^2_I(R) = H^3_I(R) = \dots$ die folgende Äquivalenz

$$\begin{aligned}\sqrt{I} = \sqrt{fR} &\iff f \text{ operiert surjektiv auf } H^1_I(R)\\ &\iff f \text{ operiert injektiv auf } D(H^1_I(R))\\ &\iff I \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(D(H^1_I(R)))} \mathfrak{p}.\end{aligned}$$

Die assoziierten Primideale der Matlis-Duale $D(H^i_I(R))$ liefern uns Informationen darüber, welche Elemente injektiv auf ihnen operieren. Damit wiederum erhalten wir mit der obigen Äquivalenz Informationen darüber, ob wir vom Verschwinden der lokalen Kohomologie auf den arithmetischen Rang des Ideals schließen können und somit weiter ob es sich um einen vollständigen Durchschnitt handelt oder nicht. An dieser Stelle wollen wir noch erwähnen, dass Ideale, die von regulären Folgen (siehe Definition 2.1.18) erzeugt werden, immer mengentheoretisch vollständige Durchschnitte bilden (siehe z.B [Kun97, Korollar 6.14]).

Bemerkung 5.6. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann erzeugt jede reguläre Folge $(f_1, \dots, f_h)$ aus R einen mengentheoretisch vollständigen Durchschnitt $I = (f_1, \dots, f_h)R$, es gilt also $height(I) = h$. Damit haben wir für ein Ideal I von R:*

$$\exists \text{ reguläre Folge } \underline{f} \text{ in } R : \sqrt{I} = \sqrt{\underline{f}R} \Longrightarrow I \text{ ist mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.}$$

Diese Idee konnte von Hellus in [Hel05b] und in [Hel09b] verallgemeinert werden und es gilt insgesamt der folgende Satz. Dabei erkennt man, welche zusätzliche Eigenschaft es uns ermöglicht, mengentheoretisch vollständige Durchschnitte zu erkennen.

Satz 5.7 (Theorem 3.5 in [Hel09b]). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring, $I \subsetneq R$ ein echtes Ideal von R, $h \in \mathbb{N}$ und sei $\underline{f} = f_1, \ldots, f_h \in I$ eine R-reguläre Folge. Dann sind äquivalent:*

(i) $\sqrt{\underline{f}R} = \sqrt{I}$*, insbesondere ist I mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt.*

(ii) $H_I^l(R) = 0$ *für alle $l > h$ und die Folge $\underline{f}$ ist quasi-regulär auf $D(H_I^h(R))$.*

(iii) $H_I^l(R) = 0$ *für alle $l > h$ und die Folge $\underline{f}$ ist regulär auf $D(H_I^h(R))$.*

(iv) $H_I^l(R) = 0$ *für alle $l > h$ und die Folge $\underline{f}$ ist filter-regulär auf $D(H_I^h(R))$.*

Beweis. [Hel09b, Theorem 3.5]. □

Dies zeigt uns, dass der Begriff des mengentheoretisch vollständigen Durchschnitts, und damit der des arithmetischen Ranges eines Ideals, in engem Zusammenhang zu regulären Folgen auf den Moduln $D(H_I^i(R))$ und damit zu den assoziierten Primidealen der Matlis-Duale steht. Es gibt also genug Anlass sich mit diesen zu beschäftigen und wir wollen ihnen im Folgenden einen eigenen Namen geben.

Definition 5.8 (koassoziierte Primideale). *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann heißt ein Primideal $\mathfrak{p} \in Spec\, R$* ***koassoziiert zu M****, falls $\mathfrak{p}$ assoziiert zu $D_R(M)$ ist. Die Menge aller koassoziierten Primideale von M bezeichnen wir mit $CoAss_R\, M$.*

Es zeigt sich, dass diese Definition gerade die richtige Definition ist, um eine Theorie von assoziierten Primidealen aufzubauen, die sich dual zu den gewöhlichen assoziierten Primidealen verhält. Es gab verschiedene Ansätze diese Theorie zu dualisieren, so z.B. durch MacDonald, Chambless oder Zöschinger (siehe [Zö88]). Yassemi hat dann in [Yas95] die auch hier benutzte Definition durch die assoziierten Primideale der Matlis-Duale vorgeschlagen und konnte zeigen, dass dann über einem noetherschen Ring alle diese verschiedenen Definitionen äquivalent sind. Für einen Überblick über die allgemeine Theorie der koassoziierten Primideale sei auf [DAT99] verwiesen.

Des Weiteren zeigt die folgende Bemerkung, dass es von großem Interesse ist zu wissen, ob die Menge $CoAss_R\, D(H_I^i(R))$ endlich oder unendlich ist. Damit hat sich z.B. Hellus in seiner Habilitationsschrift [Hel07b] befasst und wir werden die dort gewonnenen Ergebnisse im nächsten Abschnitt nutzen, um zu zeigen, dass die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ zwar $\mathcal{F}$-Moduln sind, aber im Allgemeinen nicht $\mathcal{F}$-endlich. Dies liefert dann in der Charakteristik $p > 0$ ein Analogon zu der ebenfalls von Hellus in [Hel07b] gemachten Aussage, dass in Charakteristik Null diese Moduln $\mathcal{D}$-Moduln, aber im Allgemeinen keine holonomen $\mathcal{D}$-Moduln sind. Nun aber erst zu der angekündigten Bemerkung.

Bemerkung 5.9. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein kompletter lokaler Ring und M ein R-Modul. Sei $H_I^i(M)$ ein gegebener lokaler Kohomologiemodul, der unendlich viele koassoziierte Primideale besitzt. Dann kann $H_I^i(M)$ weder endlich erzeugt, noch artinsch sein. Denn angenommen $H_I^i(M)$ wäre endlich erzeugt, dann wäre $D(H_I^i(M))$ artinsch und somit $CoAss\, H_I^i(M) = \{\mathfrak{m}\}$. Im zweiten Fall, also falls $H_I^i(M)$ artinsch wäre, wäre $D(H_I^i(M))$ endlich erzeugt und damit auch $CoAss\, H_I^i(M)$ endlich.*

Im Fall eines kompletten lokalen Ringes $(R, \mathfrak{m})$ lässt sich die Frage, wann ein gegebener lokaler Kohomologiemodul $H_I^i(M)$ für einen endlich erzeugten R-Modul M artinsch ist oder nicht, damit in Fragen über die koassoziierten Primideale, d.h. über die Menge $CoAss\, M$, übersetzen. Diese Anwendung werden wir im zweiten Teil dieses Kapitels noch näher betrachten.

5.1 $D(H_I^i(R))$ ist im Allgemeinen nicht $\mathcal{F}$-endlich

Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, tragen gewisse Matlis-Duale von lokalen Kohomologiemoduln eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur. Allerdings werden wir im folgenden Teil zeigen, dass diese Moduln $D(H_I^i(R))$ im Allgemeinen nicht $\mathcal{F}$-endlich sind. Als Ausgangspunkt dafür sei an Satz 3.4.5 erinnert:

Bemerkung 5.1.1 (Vgl. 3.4.5)**.** *Für einen $\mathcal{F}$-endlichen Modul M ist die Menge seiner assoziierten Primideale, also $Ass_R\, M$, endlich.*

Nun wurden aber von Hellus in [Hel07b] oder auch von Bahmanpour und Naghipour in [BN08] Beispiele für gewisse lokale Kohomologiemoduln gefunden, deren Matlis-Duale unendlich viele assoziierte Primideale besitzen.

Satz 5.1.2 (Theorem 4.3.4 in [Hel07b])**.** *Sei $R = \Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$ ein Potenzreihenring in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ ($n \geq 4$) über dem Körper $\Bbbk$ und sei I das Ideal $(X_1, \dots, X_{n-2})R$. Sei außerdem $p \in R$ ein Primelement mit $p \in I \cap (X_{n-1}, X_n)R$. Dann ist die Menge*

$$\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | \mathfrak{p} \in Ass_R(D(H_I^{n-2}(R))), p \in \mathfrak{p}, height(\mathfrak{p}) = 2\}$$

unendlich.

Beweis. [Hel07b, Theorem 4.3.4]. □

Satz 5.1.3 (Theorem 3.5 in [BN08])**.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler (noetherscher) Ring der Dimension d, und sei $x_1, \dots, x_d$ ein Parametersystem für R. Dann ist für jedes $i < d$ die Menge*

$$Ass_R(D(H^i_{(x_1,\dots,x_i)}(R))$$

unendlich.

Beweis. [BN08, Theorem 3.5]. □

Korollar 5.1.4. *Sei $R = \Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$ ein Potenzreihenring in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ über dem Körper $\Bbbk$, $i < n$, und sei I das Ideal $(X_1, \dots, X_i)R$. Dann ist die Menge*

$$Ass_R(D(H^i_{(X_1,\dots,X_i)}(R)))$$

unendlich.

Beweis. Da $X_1, \dots, X_n$ ein Parametersystem für R bildet, folgt die Behauptung sofort aus Satz 5.1.3. □

Außerdem hatten wir die folgende Aussage für $\mathcal{F}$-endliche Moduln in Kapitel 3 bewiesen.

Bemerkung 5.1.5 (Vgl. Satz 3.4.6). *Für einen $\mathcal{F}$-endlichen Modul M sind alle Bass-Zahlen $\mu^i(\mathfrak{p}, M)$ endlich.*

Nun hat aber Hellus in [Hel07b] gezeigt, dass die Bass-Zahlen der Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ im Allgemeinen nicht endlich sind.

Satz 5.1.6 (Theorem 7.3.2 in [Hel07b]). *Seien $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ ein Potenzreihenring in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ über dem Körper $\Bbbk$, $1 \leq i < n$ und I das Ideal $(X_1, \ldots, X_i)R$. Dann gilt:*

$$dim_{Q(R)}(D(H_I^i(R)) \otimes_R Q(R)) = \mu^0((0), D(H_I^i(R))) = \infty.$$

Insbesondere ist also die nullte Bass-Zahl des Moduls $D(H_I^i(R))$ bezüglich des Nullideals (0) nicht endlich.

Beweis. [Hel07b, Theorem 7.3.2]. □

Wir können also insgesamt folgendes Ergebnis formulieren:

Korollar 5.1.7. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält. Sei außerdem $I \subset R$ ein Ideal und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Moduln $D(H_I^n(R))$, also die Matlis-Duale gewisser lokaler Kohomologiemoduln, im Allgemeinen nicht $\mathcal{F}$-endlich.*

Beweis. Die Moduln $D(H_I^n(R))$ sind nach Korollar 4.5.2 $\mathcal{F}$-Moduln, die im Allgemeinen wegen Satz 5.1.3 unendlich viele assoziierte Primideale besitzen bzw. deren Bass-Zahlen im Allgemeinen nach Satz 5.1.6 nicht endlich sind. Damit folgt die Behauptung mit den Bemerkungen 5.1.1 oder 5.1.5. □

Beispiel 5.1.8. *Sei $R = \mathbb{F}_q[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^l$. Dann ist R ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$ und $\mathbb{F}_q \subseteq R$ ist als endlicher Körper perfekt. Sei außerdem das Ideal $I = (X_1, \ldots, X_k)$ für $1 \leq k < n$ gegeben. Dann sind die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(R)$ nach Satz 3.3.1 $\mathcal{F}$-Moduln und somit sind auch die Matlis-Duale*

$$D(H^i_{(X_1,\ldots,X_k)}(\mathbb{F}_q[[X_1, \ldots, X_n]]))$$

nach Korollar 4.5.4 $\mathcal{F}$-Moduln. Nach Korollar 5.1.4 ist $CoAss_R\,(H_I^i(R))$ aber unendlich und die Moduln $D(H_I^i(R))$ sind somit nicht $\mathcal{F}$-endlich. Die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(R)$ sind nach Korollar 3.5.5 sogar $\mathcal{F}$-endlich.

Wir werden in Kapitel 6 sehen, dass dieses Ergebnis auch in der Charakteristik 0 ein Analogon besitzt. Wir werden dort feststellen, dass die Matlis-Duale $D(H_I^n(R))$ zwar eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur tragen, aber im Allgemeinen nicht holonom sind. In Kapitel 7 wird sich dann ein sehr enger Zusammenhang zwischen $\mathcal{F}$-Moduln und $\mathcal{D}$-Moduln in positiver Charakteristik zeigen, den wir dort untersuchen werden. Insbesondere werden wir sehen, dass jeder $\mathcal{F}$-endliche Modul auch ein endlich erzeugter $\mathcal{D}$-Modul ist.

5.2 Eine Verallgemeinerung von Hartshorne's Beispiel

Wir erinnern zu Beginn an die folgende von Matlis bewiesene Charakterisierung artinscher Moduln, im Falle eines kompletten lokalen Ringes R.

Satz 5.2.1. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein noetherscher kompletter lokaler Ring, M ein R-Modul, und sei $E = E_R(\Bbbk)$ die injektive Hülle des Residuenkörpers. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist artinsch,

(ii) M ist Untermodul von E^n, der direkten Summe von Exemplaren von E für ein n,

(iii) Es existiert ein endlich erzeugter R-Modul N, so dass $M \cong Hom_R(N, E)$,

(iv) $Supp\, M \subseteq V(\mathfrak{m})$, und $Hom_R(\Bbbk, M)$ ist endlich erzeugt,

(v) $Supp\, M \subseteq V(\mathfrak{m})$, und $Ext_R^i(\Bbbk, M)$ ist endlich erzeugt für jedes i,

(vi) $Supp\, M \subseteq V(\mathfrak{m})$, und $Hom_R(M, E)$ ist endlich erzeugt.

Beweis. [Har70, Proposition 1.1]. □

Satz 5.2.2. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter lokaler Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist für $i \in \mathbb{N}$*

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M)$$

artinsch und für alle $i, j \in \mathbb{N}$ sind die Moduln

$$Ext_R^j(\Bbbk, H_{\mathfrak{m}}^i(M))$$

endlich erzeugt. Insbesondere ist also auch $Hom_R(\Bbbk, H_{\mathfrak{m}}^i(M))$ endlich erzeugt.

Beweis. [Har70, Corollary 1.4, Corollary 1.5]. □

Letzteres Ergebnis hatte Grothendieck in [Gro68] dazu veranlasst, das Folgende zu vermuten:

Vermutung 5.2.3 (Vgl. Exposé XIII/Conjecture 1.1 in [Gro68])**.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist*

$$Hom_R(R/I, H_I^i(R))$$

endlich erzeugt.

Diese Vermutung konnte von Hartshorne aber widerlegt werden. In [Har70] gibt er ein Beispiel für einen Ring R und ein Ideal $I \subseteq R$ an, so dass $Hom_R(R/I, H_I^2(R))$ nicht endlich erzeugt ist, da der Sockel $Hom_R(R/\mathfrak{m}, H_I^2(R)))$ nicht endlich erzeugt ist. Insbesondere ist $H_I^2(R)$ damit auch nicht artinsch. Wir wollen dieses Beispiel nun kurz vorstellen. Es sei darauf hingewiesen, dass Hartshorne selbst eine etwas andere Situation betrachtet hat, diese aber dasselbe Ergebnis liefert (siehe z.B. [HS09]).

Beispiel 5.2.4 (Hartshorne's Beispiel)**.** *Sei $\Bbbk$ ein Körper und sei R die Hyperfläche*

$$\Bbbk[[w,x,y,z]]/(wx-yz).$$

Sei außerdem $I \subseteq R$ das Ideal von R, das von den Klassen von x und y in R erzeugt wird. Wir betrachten nun den Modul $H^2_I(R)$. Man kann zeigen (siehe z.B. [Sin03]), dass die Elemente

$$[y^n z^n + (x^{n+1}, y^{n+1})R] \in H^2_I(R) \quad \text{für } n \geq 0$$

nicht Null sind und vom maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (w,x,y,z)$ annulliert werden. Das heißt aber gerade, dass diese Elemente den unendlich dimensionalen Vektorraum $Hom_R(R/\mathfrak{m}, H^2_I(R))$ aufspannen (siehe [Sin03]), dieser also als R-Modul nicht endlich erzeugt ist, und somit kann auch $Hom_R(R/I, H^2_I(R))$ nicht endlich erzeugt sein.

Hartshorne definierte daraufhin einen R-Modul M als $\mathfrak{a}$-koendlich, falls $Supp_R M \subset V(\mathfrak{a})$ und falls $Ext^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$ endlich erzeugt ist für alle $i \in \mathbb{N}$. Sein Beispiel zeigt also, dass lokale Kohomologiemoduln $H^i_I(M)$ im Allgemeinen nicht I-koendlich sind. Er konnte aber zeigen, dass die Moduln $H^i_I(M)$ für einen endlich erzeugten R-Modul M I-koendlich sind, falls R ein kompletter regulärer lokaler Ring und I ein Primideal ist mit $dim_R\, R/I = 1$. Dies konnte von Yoshida in [Yos97] und von Delfino und Marley in [DM97] soweit erweitert werden, dass sie gezeigt haben, dass für einen lokalen Ring R und einen endlichen Modul M die Moduln $H^i_I(M)$ I-koendlich sind, falls $dim_R\, R/I = 1$ ist.

Hellus und Stückrad haben in [HS09] das Beispiel von Hartshorne noch verallgemeinert, indem sie einen Zusammenhang zwischen den koassoziierten Primidealen gewisser lokaler Kohomologiemoduln $H^i_I(R/\mathfrak{a})$ und den Moduln $Hom_R(R/\mathfrak{a}, D(H^i_I(R)))$ herstellten. Diese Verallgemeinerung wollen wir hier kurz vorstellen. Unser Ausgangspunkt ist die folgende Bemerkung:

Bemerkung 5.2.5 (Vgl. [Ooi76] bzw. 2.2.34)**.** *Sei R ein noetherscher kompletter lokaler Ring. Dann ist für einen artinschen R-Modul M das Matlis-Dual $D_R(M)$ endlich erzeugt.*

Diese Bemerkung liefert uns ein wichtiges Hilfsmittel, um zu entscheiden, ob ein gegebener lokaler Kohomologiemodul artinsch ist. Wir können nämlich den Modul $Hom_R(R/\mathfrak{a}, D(H^n_I(R)))$ mit dem Matlis-Dual von $H^n_I(R/\mathfrak{a})$ identifizieren, falls $H^k_I(R) = 0$ für alle k>n gilt. Matlis-Dualität liefert uns nun eine Korrespondenz zwischen artinschen und endlich erzeugten Moduln.

Lemma 5.2.6. *Falls $H^k_I(R) = 0$ für alle k>n, dann gilt:*

$$\begin{aligned} D_R(H^n_I(R/\mathfrak{a})) &= Hom_R(H^n_I(R/\mathfrak{a}), E(R/m)) \\ &\cong Hom_R(R/\mathfrak{a} \otimes_R H^n_I(R), E(R/m)) \\ &\cong Hom_R(R/\mathfrak{a}, Hom_R(H^n_I(R), E(R/m))) \\ &= Hom_R(R/\mathfrak{a}, D(H^n_I(R))). \end{aligned}$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist der Funktor H^n_I additiv und rechtsexakt (betrachte die lange exakte Kohomologiefolge). Er erhält somit Surjektionen. Betrachten wir nun die natürliche Projektion $\rho:\ R \to R/\mathfrak{a}$, so ist also die induzierte Abbildung

$$\bar{\rho}:\ H^n_I(R) \longrightarrow H^n_I(R/\mathfrak{a})$$

surjektiv. Damit lassen sich nun die folgenden beiden Homomorphismen definieren:

$$\begin{array}{rcl} Hom_R(R/\mathfrak{a} \otimes_R H_I^n(R), E(R/m)) & \longrightarrow & Hom_R(H_I^n(R/\mathfrak{a}), E(R/m)) \\ g & \longmapsto & (\quad x \quad \mapsto \quad g(\bar{\rho}^{-1}(x) \otimes 1) \quad) \\ Hom_R(H_I^n(R/\mathfrak{a}), E(R/m)) & \longrightarrow & Hom_R(R/\mathfrak{a} \otimes_R H_I^n(R), E(R/m)) \\ h & \longmapsto & (\quad r \otimes y \mapsto \quad h(\bar{\rho}(y) \cdot r) \quad) \end{array}$$

Nun rechnet man nach, dass beide Homomorphismen gerade invers zueinander sind. Damit gilt die erste Isomorphie. Die zweite Isomorphie ist gerade die Hom-Tensor-Adjungiertheit aus Lemma 4.4.1. □

Wir können somit mit der folgenden Gleichheit arbeiten:

$$CoAss_R\, H_I^n(R/\mathfrak{a}) = Ass_R\, Hom_R(R/\mathfrak{a}, D(H_I^n(R))).$$

Die rechte Menge lässt sich nun aber noch genauer beschreiben. Es gilt

Satz 5.2.7. *Sei R ein noetherscher Ring, M ein R-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:*

$$Ass_R\, Hom_R(R/\mathfrak{a}, D(H_I^i(M))) = V(\mathfrak{a}) \cap Ass_R\, D(H_I^i(M))$$

Beweis. Sei also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cap Ass_R\, D(H_I^i(M))$. Wir haben zu zeigen, dass

$$\mathfrak{p} = Ann_R(\varphi) \quad \text{für ein } \varphi \in Hom_R(R/\mathfrak{a}, D(H_I^i(R))).$$

Nach Voraussetzung haben wir einen Monomorphismus $f:\ R/\mathfrak{p} \to D(H_I^i(M))$, mit dem wir die folgende Abbildung definieren können

$$\varphi:\ R/\mathfrak{a} \longrightarrow D(H_I^i(M)),\ r + \mathfrak{a} \mapsto f(r).$$

Diese ist wohldefiniert, da nach Voraussetzung $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und es gilt $\mathfrak{p} = Ann_R(\varphi)$, da $Ker\,\varphi = \mathfrak{p} \cap R/\mathfrak{a}$. Dies zeigt also "$\supseteq$". Sei nun $\mathfrak{p} \in Hom_R(R/\mathfrak{a}, D(H_I^i(M)))$, d.h.

$$\mathfrak{p} = Ann_R(\varphi) \quad \text{für ein } \varphi:\ R/\mathfrak{a} \to D(H_I^i(M)).$$

Dann gilt offensichtlich $\mathfrak{a}\varphi = 0$, also $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und somit $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Andererseits gilt auch $\mathfrak{p}\varphi(1) = 0$ und $Ann_R(\varphi(1)) \subseteq Ann_R(\varphi) = \mathfrak{p}$ und somit $\mathfrak{p} = Ann_R(\varphi(1))$. □

Wir hatten in Satz 5.1.2 gesehen, dass für $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]] (n \geq 4)$, $I = (X_1, \ldots, X_{n-2})$ und p prim mit $p \in I \cap (X_{n-1}, X_n)$, die Menge

$$Ass_R\, D(H_I^{n-2}(R)) \cap V(p)$$

unendlich ist. Diese Tatsache konnte nun von Hellus und Stückrad in [HS09] zusammen mit den bisherigen Beobachtungen aus diesem Abschnitt dazu benutzt werden, das erwähnte Beispiel von Hartshorne zu verallgemeinern.

Korollar 5.2.8 (Vgl. Theorem 6.2.3 in [Hel07b])**.** *Sei $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ ein Potenzreihenring in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 4)$ über dem Körper $\Bbbk$ und sei I das Ideal $(X_1, \ldots, X_{n-2})R$. Sei außerdem $p \in R$ ein Primelement mit $p \in (X_{n-1}, X_n)R$. Dann ist*

$$H_I^{n-2}(R/pR)$$

nicht artinsch.

Beweis. Falls $p \notin I$, so ist

$$Supp_R(H_I^{n-2}(R/pR)) = V(I + pR)$$

und somit ist $H_I^{n-2}(R/pR))$ nicht artinsch, da der Modul nicht null-dimensional ist. Sei also $p \in I \cap (X_{n-1}, X_n)R$. Dann ist nach Satz 5.1.2 die Menge

$$\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | \mathfrak{p} \in Ass_R(D(H_I^{n-2}(R))), p \in \mathfrak{p}\} = CoAss_R\, H_I^{n-2}(R) \cap V(p)$$

unendlich. Damit besitzt wegen Satz 5.2.7 aber auch $Hom_R(R/p, D(H_I^{n-2}(R)))$ unendlich viele assoziierte Primideale und ist somit nicht endlich erzeugt. Folglich ist nach Lemma 5.2.6 auch $D_R(H_I^n(R/p))$ nicht endlich erzeugt und somit folgt die Behauptung aus Bemerkung 5.2.5, da R komplett ist. □

5.3 Über koassoziierte Primideale der höchsten lokalen Kohomologiemoduln

Khashyarmanesh und Khosh-Ahang haben in [KKA08] gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen an die Moduln $Ext_R^i(R/I, D(H_I^j(M)))$ auch gewisse Moduln $Hom(R/I, D(H_I^n(M)))$ für endlich erzeugtes M wieder endlich erzeugt sind. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass sich daraus Aussagen über die koassoziierten Primideale der lokalen Kohomologiemoduln treffen lassen. Genauer gilt:

Lemma 5.3.1 (Vgl. Theorem 3.4 in [KKA08])**.** *Sei (R,m) ein kompletter lokaler Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Sei nun n eine positive natürliche Zahl und sei $Ext_R^i(R/I, D(H_I^t(M)))$ endlich erzeugt für alle $i \in \mathbb{N}$ und für alle $t > n$. Dann ist auch*

$$Hom_R(R/I, D(H_I^n(M)))$$

endlich erzeugt.

Beweis. [KKA08, Theorem 3.4]. □

Damit liefern uns also gewisse Endlichkeitsforderungen an die Ext-Moduln Ergebnisse über die koassoziierten Primideale. Denn es ergibt sich das Folgende:

Korollar 5.3.2. *Unter den Voraussetzungen des letzten Lemmas ist die Menge*

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | \mathfrak{p} \in Ass_R(D(H_I^n(R))), I \subseteq \mathfrak{p}\} &= V(I) \cap Ass_R D(H_I^n(M)) \\ &= V(I) \cap CoAss_R H_I^n(M)\end{aligned}$$

endlich.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 5.3.1, da folgende Gleichheit besteht (siehe Satz 5.2.7):

$$Ass_R\, Hom_R(R/I, D(H_I^n(M))) = V(I) \cap Ass_R\, D(H_I^n(M)).$$

□

Insbesondere ist damit für die höchsten lokalen Kohomologiemoduln die Menge der koassoziierten Primideale, die I enthalten, endlich.

Korollar 5.3.3. *Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein kompletter lokaler Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$, so dass $H_I^i(M) = 0$ für alle $i > n$. Dann ist die Menge*

$$CoAss_R(H_I^n(M)) \cap V(I)$$

endlich.

Beweis. Da $H_I^i(M) = 0$ für alle $i > n$ gilt, ist auch $D(H_I^i(M)) = 0$ für alle $i > n$ und damit $Ext_R^j(R/I, D(H_I^i(M)))$ endlich erzeugt für alle $j \in \mathbb{N}$ und für alle $i > n$. Korollar 5.3.2 liefert nun die Behauptung. □

Beispiel 5.3.4 (Vgl. Theorem 3.1.3 in [Hel07b]). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein kompletter lokaler Ring. Dann gilt*

$$Ass_R(D(H_{xR}^1(R))) = CoAss_R(H_{xR}^1(R)) = Spec(R) \setminus V(x).$$

Hier gilt also sogar $CoAss_R(H_{xR}^1(R)) \cap V(x) = \emptyset$.

5.4 Die Vermutung von Hellus

In seiner Habilitationsschrift ([Hel07b]) hat sich Hellus sehr stark mit der Struktur der koassoziierten Primideale von lokalen Kohomologiemoduln beschäftigt. Wir wollen zum Abschluss unserer Untersuchungen zu diesem Thema hier noch eine Vermutung nennen, die in [Hel07b] formuliert wurde und welche viele Informationen über die Menge $CoAss\, H^i_{(x_1,\ldots,x_i)R}(R)$ liefern könnte. Ausgangspunkt ist die folgende Beobachtung:

Bemerkung 5.4.1 (Remark 1.2.1 in [Hel07b]). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein R-Modul, $h \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq R$ ein Ideal von R, so dass $H_I^l(M) = 0$ für alle $l > h$ gilt. Sei weiterhin $\mathfrak{p} \in Ass_R(D(H_I^h(M)))$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} 0 &\neq Hom_R(R/\mathfrak{p}, D(H_I^h(M))) \\ &= D(H_I^h(M) \otimes_R (R/\mathfrak{p})) \\ &= D(H_I^h(M/\mathfrak{p}M)) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also $H_I^h(M/\mathfrak{p}M) \neq 0$.

Speziell für $M = R$ gilt also das Folgende.

Korollar 5.4.2. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, $h > 0$ und seien $x_1, \ldots, x_h$ Elemente von R. Dann gilt:*

$$Ass_R(D(H^h_{(x_1,\ldots,x_h)R}(R))) \subseteq \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | H^h_{(x_1,\ldots,x_h)R}(R/\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

Nun wurde von Hellus vermutet, dass in der obigen Relation sogar Gleichheit gilt und er hat das Folgende formuliert.

Vermutung 5.4.3 (Conjecture 1.2.2 in [Hel07b]). *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, $h > 0$, und seien $x_1, \ldots, x_h$ Elemente von R. Dann gilt:*

$$Ass_R(D(H^h_{(x_1,\ldots,x_h)R}(R))) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | H^h_{(x_1,\ldots,x_h)R}(R/\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

Kapitel 6

Das analoge Ergebnis in Charakteristik Null

Angeregt durch Gennady Lyubeznik hat Hellus in seiner Habilitationsschrift [Hel07b] gezeigt, dass die Matlis-Duale der lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(R)$, also die Moduln $D(H_I^i(R))$, eine natürliche $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzen. Damit ist es möglich, die durch Lyubeznik in [Lyu93] gefundenen Ergebnisse über $\mathcal{D}$-Moduln in der kommutativen Algebra auf solche Matlis-Duale anzuwenden. Weitere Ergebnisse von Hellus zeigen allerdings, dass bestimmte Endlichkeitsbedingungen, welche für die Moduln $H_I^i(R)$ gelten, für ihre Duale nicht mehr richtig sind. Analog zu unseren Ergebnissen in Abschnitt 5.1 zeigt Hellus, dass die Matlis-Duale zwar eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur tragen, sie im Allgemeinen aber Beispiele für nicht endlich erzeugte $\mathcal{D}$-Moduln sind. Damit sind diese insbesondere nicht holonom.

6.1 Ringe von Differential-Operatoren und $\mathcal{D}$-Moduln

Wir wollen jetzt einen kurzen Überblick über die Theorie der $\mathcal{D}$-Moduln geben. Unser Hauptaugenmerk liegt dabei auf den von Lyubeznik in [Lyu93] beschriebenen Anwendungen der $\mathcal{D}$-Moduln in der kommutativen Algebra. Wir werden also zu Beginn die nötigen Begriffe einführen, das nächste Ziel ist dann die Definition der holonomen $\mathcal{D}$-Moduln, die in gewisser Weise das Charakteristik Null Analogon zu den $\mathcal{F}$-endlichen Moduln in positiver Charakteristik bilden. Insbesondere werden wir sehen, dass ganz ähnliche Endlichkeitsbedingungen für die $\mathcal{D}$-Moduln gelten, wie wir sie auch für $\mathcal{F}$-Moduln aus Abschnitt 3.4 kennen. Weitere Informationen zu Ringen von Differentialen finden sich in [Bj9], [Cou95] oder auch [ea07]. Nun aber erst einmal zu den grundlegenden Definitionen:

Sei $\Bbbk$ ein Körper und R eine kommutative $\Bbbk$-Algebra. Wir werden jetzt den Ring der $\Bbbk$-linearen Differentiale auf R definieren. Grob gesagt, handelt es sich dabei um den nichtkommutativen Unterring

$$\mathcal{D}(R;\Bbbk) \subseteq End_{\Bbbk}(R)$$

des Ringes der $\Bbbk$-linearen Endomorphismen auf R, welcher von den Abbildungen, die durch die Multiplikation mit Elementen aus R definiert sind, und sämtlichen $\Bbbk$-linearen Derivationen auf R

erzeugt wird. Es sei daran erinnert, dass wir eine Einbettung von $\Bbbk$-Algebren $R \subseteq End_{\Bbbk}(R)$ (via $r \mapsto (s \mapsto rs)$) haben. Für Elemente $f, g \in End_{\Bbbk}(R)$ sei

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f$$

der Kommutator von f und g, wobei $\circ$ die Komposition von Abbildungen bezeichnet. Damit können wir das Folgende definieren:

Definition 6.1.1 (Ring der $\Bbbk$-linearen Differentiale auf R). *Sei $\mathcal{D}_0(R; \Bbbk) = R$, aufgefasst als Unterring von $End_{\Bbbk}(R)$, und für jedes $i \geq 0$ sei*

$$\mathcal{D}_{i+1}(R; \Bbbk) = \{f \in End_{\Bbbk}(R) \mid [f, r] \in \mathcal{D}_i(R; \Bbbk) \, \forall \, r \in R\}.$$

Nun kann man zeigen, dass, falls $f \in \mathcal{D}_i(R; \Bbbk)$ und $g \in \mathcal{D}_j(R; \Bbbk)$, $f \circ g \in \mathcal{D}_{i+j}(R; \Bbbk)$ folgt (siehe [Cou95, 1.2]). Auf diese Weise erhalten wir eine $\Bbbk$-Unteralgebra von $End_{\Bbbk}(R)$,

$$\mathcal{D}(R; \Bbbk) = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{D}_i(R; \Bbbk).$$

*Diese bezeichnen wir als **Ring der $\Bbbk$-linearen Differentiale auf** R. Die Abbildungen aus $\mathcal{D}_i(R; \Bbbk)$ heißen **Differentiale der Ordnung $\leq i$**.*

Beispiel 6.1.2. *Sei $\delta \in End_{\Bbbk}(R)$ eine Derivation, also eine Abbildung mit $\delta(rs) = \delta(r)s + r\delta(s)$ für $r, s \in R$. Dann gilt*

$$[\delta, r] = \delta \circ r - r \circ \delta = \delta(r) \in R = \mathcal{D}_0(R; \Bbbk).$$

Damit sieht man, dass $\mathcal{D}_1(R; \Bbbk)$ gerade das $\Bbbk$-Erzeugnis von R und den Derivationen ist (siehe [Cou95, 1.1]).

Beispiel 6.1.3. *Sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null und sei $R = \Bbbk[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über $\Bbbk$. Dann ist $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$ als $\Bbbk$-Unteralgebra von $End_{\Bbbk}(R)$ erzeugt von der Multiplikation mit X und der Ableitung $\partial = \partial/\partial X$ nach X. Als $\Bbbk$-Vektorraum gilt also*

$$\mathcal{D}(R; \Bbbk) = \bigoplus_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2} \Bbbk \cdot X^{i_1} \partial^{i_2}$$

und als R-Modul gilt

$$\mathcal{D}(R; \Bbbk) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R \cdot \partial^i.$$

Wir sehen also, dass über einem Polynomring in einer Unbestimmten der Ring der Differentiale eine besonders einfache Gestalt besitzt. Es wird sich nun herausstellen, dass dies über beliebigen Polynomringen in endlich vielen Unbekannten richtig ist. Wir definieren dazu die sogenannte Weyl-Algebra als jene $\Bbbk$-Unteralgebra des $\Bbbk$-Endomorphismenringes eines Polynomringes $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$, die von den Multiplikationen mit den Unbestimmten X_i und den zugehörigen partiellen Ableitungen $\partial/\partial X_i$ erzeugt wird. Es wird sich zeigen, dass in diesem Fall die Weyl-Algebra und der Ring der Differentiale auf R gerade übereinstimmen. Dabei stellt es sich als notwendig heraus, dass $char \, \Bbbk = 0$ gilt, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden. In positiver Charakteristik ist die Weyl-Algebra im Allgemeinen zu klein (siehe Satz 7.1.3).

Definition 6.1.4 (Weyl-Algebra)**.** *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper und $R = \mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynomring über $\mathbb{k}$ in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Dann ist die **n-te Weyl-Algebra** $\mathcal{D}_n(\mathbb{k})$ definiert als die $\mathbb{k}$-Unteralgebra von $End_{\mathbb{k}}(R)$, die für $1 \leq i \leq n$ von den Multiplikationen mit X_i und den partiellen Ableitungen $\partial_i = \partial/\partial X_i$ erzeugt wird. Als $\mathbb{k}$-Vektorraum gilt also*

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{k}) = \bigoplus_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} \mathbb{k} \cdot \mathbf{X}^\alpha \boldsymbol{\partial}^\beta,$$

und als R-Modul gilt

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{k}) = \bigoplus_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n} R \cdot \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}.$$

Wir benutzen dabei die Multiindex-Schreibweise, d.h. für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, sei $\mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ und $\boldsymbol{\partial}^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.

Satz 6.1.5. *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper der Charakteristik Null und sei $R = \mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynomring in n Unbestimmten. Dann ist der Ring der Differentiale auf R gleich der n-ten Weyl-Algebra von $\mathbb{k}$. Es gilt also*

$$\mathcal{D}(R; \mathbb{k}) = \mathcal{D}(\mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]; \mathbb{k}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{k}).$$

Beweis. [Cou95, Theorem 2.3]. □

Satz 6.1.6. *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper der Charakteristik Null. Dann gilt:*

$\mathcal{D}_n(\mathbb{k})$ ist ein links- und rechtsnoetherscher Ring.

Beweis. [ea07, Proposition 17.17]. □

Definition 6.1.7 ($\mathcal{D}$-Modul)**.** *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper und R eine kommutative $\mathbb{k}$-Algebra. Dann bezeichnen wir einen Links-Modul über dem Ring $\mathcal{D}(R; \mathbb{k})$, also dem Ring der Differentiale auf R, als **$\mathcal{D}$-Modul**. Falls $\operatorname{char} \mathbb{k} = 0$ gilt und $R = \mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]$, so ist ein $\mathcal{D}$-Modul also ein Links-Modul über der Weyl-Algebra $\mathcal{D}_n(\mathbb{k})$.*

Beispiel 6.1.8. *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper und R eine kommutative $\mathbb{k}$-Algebra.*

(i) Die natürliche Operation von $\mathcal{D}(R; \mathbb{k}) \subseteq End_{\mathbb{k}}(R)$ auf R macht den Ring R zu einem $\mathcal{D}$-Modul.

(ii) Sei M ein $\mathcal{D}$-Modul und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge. Dann trägt M_S eine natürliche $\mathcal{D}$-Modul-Struktur. Für $r \in R$ sei $r(m/s) = (rm)/s$ und für jede Derivation δ definiert man $\delta(m/s)$ mit Hilfe der Quotientenregel. Also $\delta(m/s) = (s\delta(m) - \delta(s)m)/s^2$ und dies induziert eine Operation von $\mathcal{D}(R; \mathbb{k})$ auf M_S. Insbesondere ist R_f für jedes $f \in R$ ein $\mathcal{D}$-Modul.

Unser Ziel ist es, analog zum Inhalt von Kapitel 4, zu zeigen, dass die Matlis-Duale gewisser lokaler Kohomologiemoduln, also die Moduln $D(H_I^i(R))$, für einen kompletten regulären lokalen Ring $(R, \mathfrak{m}, \mathbb{k})$ mit $\mathbb{k} \subseteq R$ eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzen. Dies wurde von Hellus in [Hel07b] gezeigt und wird von uns im nächsten Abschnitt besprochen. Zunächst bemerken wir, dass wir uns wegen Satz 4.3.9 gerade in der Situation befinden, dass $R \cong \mathbb{k}[[X_1, \ldots, X_n]]$ gilt. Wir haben bis jetzt den Ring der Differentiale eines Polynomringes näher untersucht und wollen dies im Folgenden auch für den Fall eines Potenzreihenringes $\mathbb{k}[[X_1, \ldots, X_n]]$ tun.

Beispiel 6.1.9. *(Vgl. 1.1 in [Bj9, 3, §1]) Sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null und sei $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring über $\Bbbk$ in n Unbestimmten. Wir wollen nun den Ring der Differentiale $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$ auf R beschreiben und können zu Beginn feststellen, dass wir den Polynomring $S = \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ als Unterring der endlichen Potenzreihen von R auffassen können. Damit wird die Weyl-Algebra $\mathcal{D}_n(\Bbbk) = \mathcal{D}(S; \Bbbk)$ zu einem Untering von $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$ und somit gilt*

$$\mathcal{D}(R; \Bbbk) = R \otimes_S \mathcal{D}_n(\Bbbk).$$

Damit hat $\mathcal{D}(R, \Bbbk)$ als R-Modul wegen Bemerkung 4.4.4 die Form

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(R; \Bbbk) &= R \otimes_S \mathcal{D}_n(\Bbbk) \\ &\cong R \otimes_S \Big(\bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} S \cdot \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n} \Big) \\ &\cong \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} (R \otimes_S S \cdot \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}) \\ &\cong \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} R \cdot \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass R die Komplettierung von S am maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$ ist. Es gilt also $R = \widehat{S}$ und die natürliche Abbildung $\widehat{S} \otimes_S M \to \widehat{M}$ ist ein Isomorphismus, falls M endlich erzeugter S-Modul ist (siehe [Eis04, 7.2]).

Dieses Beispiel motiviert die folgende Definition.

Definition 6.1.10. *Sei $\Bbbk$ ein Körper und $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring über $\Bbbk$ in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Dann ist die* ***n-te Potenzreihen-Weyl-Algebra*** *$\widehat{\mathcal{D}}_n(\Bbbk)$ definiert als die $\Bbbk$-Unteralgebra von $\mathrm{End}_{\Bbbk}(R)$, die von R und den partiellen Ableitungen $\partial_i = \partial/\partial X_i$ erzeugt wird. Insbesondere gilt $\widehat{\mathcal{D}}_n(\Bbbk) = R \otimes_{\Bbbk[X_1,\ldots,X_n]} \mathcal{D}_n(\Bbbk)$.*

Damit haben wir jetzt analog zum Fall eines Polynomringes in Satz 6.1.5 eine genaue Beschreibung des Ringes der Differentiale auf einem Potenzreihenring über $\Bbbk$ in endlich vielen Unbestimmten.

Bemerkung 6.1.11. *Sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null und sei $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring in n Unbestimmten. Dann ist der Ring der Differentiale auf R gleich der n-ten Potenzreihen-Weyl-Algebra von $\Bbbk$. Es gilt also*

$$\mathcal{D}(R; \Bbbk) = \mathcal{D}(\Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]; \Bbbk) = \widehat{\mathcal{D}}_n(\Bbbk).$$

Diese Darstellung des Ringes der Differentiale $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$ auf dem Potenzreihenring R ermöglicht es uns im kommenden Abschnitt, Hellus in [Hel07b] folgend, zu zeigen, dass die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ $\mathcal{D}$-Moduln sind. Bevor wir dazu kommen, wollen wir noch eine spezielle Klasse von endlich erzeugten $\mathcal{D}$-Moduln vorstellen, die sogenannten holonomen $\mathcal{D}$-Moduln. Diese Moduln werden uns, analog zu den $\mathcal{F}$-endlichen Moduln in Abschnitt 3.4, Beispiele für Moduln liefern, die sich gutartig im Hinblick auf gewisse Endlichkeitsbedingungen verhalten.

Sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null und sei $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ ein Potenzreihenring oder $R = \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$, ein Polynomring über $\Bbbk$. Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R; \Bbbk)$ und sei M ein endlich erzeugter $\mathcal{D}$-Modul. Dann besitzt der Ring der Differentiale $\mathcal{D}$ eine Filtrierung Σ und M besitzt eine “gute”

Filtrierung Γ. Damit kann M ein Modul $gr_\Gamma(M)$ über der zu $\mathcal{D}$ assoziierten graduierten Algebra $gr_\Sigma(\mathcal{D})$ zugeordnet werden und $gr_\Gamma(M)$ ist dann ein endlich erzeugter $gr_\Sigma(\mathcal{D})$-Modul (da Γ eine "gute" Filtrierung ist). Betrachtet man nun das zugehörige Hilbertpolynom

$$H_{M,\Gamma}(t) = \sum_0^t dim_{\mathbb{k}}(\Gamma_i/\Gamma_{i-1}) = dim_{\mathbb{k}}(\Gamma_t),$$

so kann man feststellen, dass dessen Grad nicht von der gewählten Filtrierung Γ abhängt. Damit definiert man

$$dim_{\mathcal{D}}(M) := deg\, H_{M,\Gamma}(t),$$

und nennt diese Zahl ***Dimension des $\mathcal{D}$-Moduls M***.

Genaue Details zu dieser Konstruktion finden sich für den Fall, dass R ein Polynomring ist, und somit also für den Fall der Weyl-Algebra, in dem Buch von Coutinho ([Cou95]) oder auch in dem Buch von Iyengar et al. ([ea07]). Für den Fall $R = \mathbb{k}[[X_1, \dots, X_n]]$ findet man die nötigen Informationen in dem Standardwerk von Björk ([Bj9]).

Wir können damit nun die holonomen $\mathcal{D}$-Moduln definieren.

Definition 6.1.12 (holonome $\mathcal{D}$-Moduln)**.** *In obiger Situation heißt ein endlich erzeugter $\mathcal{D}$-Modul M* ***holonom****, falls*

$$dim_{\mathcal{D}}(M) = n \text{ oder } M = 0$$

gilt.

Satz 6.1.13. *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper der Charakteristik Null und sei $R = \mathbb{k}[[X_1, \dots, X_n]]$. Dann ist der Ring der Differentiale*

$$\mathcal{D}(R; \mathbb{k}) = \widehat{\mathcal{D}}_n(\mathbb{k})$$

links- und rechtsnoethersch.

Beweis. [Bj9, 3, §1, Lemma 1.6]. □

Im Allgemeinen haben die Ringe der Differentiale $\mathcal{D}(R; \mathbb{k})$ auf einem Ring R keine besonders guten Eigenschaften. So wird sich in Kapitel 7 zeigen, dass für einen Potenzreihenring $R = \mathbb{k}[[X_1, \dots, X_n]]$ der Charakteristik $p > 0$, der Ring der Differentiale $\mathcal{D}(R; \mathbb{k})$ kein noetherscher Ring mehr ist. Im Fall von Charakteristik Null ist der Ring $\mathcal{D}(R, \mathbb{k})$ aber noethersch, wie der letzte Satz gezeigt hat, und damit jeder endlich erzeugte $\mathcal{D}$-Modul wieder noethersch. Insbesondere besitzen dann die holonomen $\mathcal{D}$-Moduln, also spezielle endlich erzeugte $\mathcal{D}$-Moduln, gute Eigenschaften, wie die folgenden Bemerkungen zeigen.

Bemerkung 6.1.14. *(siehe [Lyu93, 2.2]) Sei $\mathbb{k}$ ein Körper der Charakteristik Null und sei $R = \mathbb{k}[[X_1, \dots, X_n]]$. Sei außerdem $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R; \mathbb{k})$ der Ring der Differentiale auf R. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Der Ring R mit der natürlichen $\mathcal{D}$-Modul-Struktur ist holonom.

(ii) Ist M ein holonomer R-Modul und $f \in R$, so ist die Lokalisierung M_f holonom.

(iii) Die holonomen $\mathcal{D}$-Moduln bilden eine abelsche Teilkategorie der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln, die abgeschlossen ist unter Bildung von Teilmoduln, Bildung von Quotienten und Erweiterungen.

(iv) Sei $I \subset R$ ein Ideal und M ein holonomer $\mathcal{D}$-Modul. Dann sind auch die Moduln $H^i_I(M)$ holonom.

(v) Holonome Moduln sind halbeinfach, d.h. sie besitzen eine endliche Filtrierung mit einfachen Quotienten (siehe [Bj9, 2.7.13]).

(vi) Einfache holonome Moduln besitzen genau ein assoziiertes Primideal.

Insbesondere sind die lokalen Kohomologiemoduln $H^i_I(R)$ holonome $\mathcal{D}$-Moduln.

6.2 $\mathcal{D}$-Modul-Struktur von $D(H^i_I(R))$

Wir wollen jetzt die von Hellus in [Hel07b] gemachte Konstruktion vorstellen, die zeigt, dass die Moduln $D(H^i_I(R))$ eines Potenzreihenringes $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ über einem Körper $\Bbbk$ der Charakteristik Null $\mathcal{D}$-Moduln sind. Dies ist das Charakteristik Null Analogon zu dem von uns in positiver Charakteristik bewiesenen Korollar 4.5.4. Insbesondere befinden wir uns, bis auf die Charakteristik, in der gleichen Situation wie in Beispiel 4.5.5, da in Charakteristik Null jeder Körper $\Bbbk$ perfekt ist.

Satz 6.2.1 (Vgl. 7.2 in [Hel07b])**.** *Sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null und $R = \Bbbk[[X_1, \ldots X_n]]$ ein Potenzreihenring über $\Bbbk$ in n Variablen. Sei außerdem $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Dann sind die Matlis-Duale $D(H^i_I(R))$ auf kanonische Weise (Links-)$\mathcal{D}$-Moduln.*

Beweis. Wegen Beispiel 6.1.9 haben wir

$$\mathcal{D}(R;\Bbbk) = \widehat{\mathcal{D}}_n(\Bbbk) = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} R \cdot \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}, \tag{6.1}$$

und somit reicht es, die Wirkung einer beliebigen $\Bbbk$-linearen Derivation $\delta : R \to R$ auf $D(H^i_I(R))$ zu bestimmen. Dies kann dann mit Hilfe von Gleichung (6.1) zu einer Aktion von $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ auf $D(H^i_I(R))$ erweitert werden und es kann gezeigt werden, dass diese wohldefiniert ist und alle Bedingungen an einen (Links-)$\mathcal{D}$-Modul erfüllt. Sei also

$$\delta : R \to R \quad \in \mathcal{D}(R;\Bbbk) \subseteq End_{\Bbbk}(R)$$

eine beliebige $\Bbbk$-lineare Derivation, d.h es gilt $\delta(r \cdot s) = \delta(r) \cdot s + r \cdot \delta(s)\, \forall r, s \in R$. Insbesondere ist δ nicht durch die Multiplikation mit einem Ringelement gegeben, sondern durch gewisse partielle Ableitungen. Damit induziert δ aber eine $\Bbbk$-lineare Abbildung

$$R/I^\nu \longrightarrow R/I^{\nu-1} \text{ für } \nu \geq 1,$$

welche nun wiederum auf kanonische Weise die folgende Abbildung von Komplexen vom Čech-Komplex von R/I^ν bezüglich $\mathbf{X} = X_1, \ldots, X_n$ in den Čech-Komplex von $R/I^{\nu-1}$ bezüglich $\mathbf{X}$ induziert

$$\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathbf{X}; R) \otimes_R R/I^\nu \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathbf{X}; R) \otimes_R R/I^{\nu-1}.$$

Berechnen wir die Kohomologie dieser Komplexe, so erhalten wir nach Satz 2.1.29 für jedes $\nu \geq 1$ eine Abbildung

$$H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{\nu}) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{\nu-1}). \tag{6.2}$$

Hierbei ist zu beachten, dass das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R gerade von $\mathbf{X} = X_1, \ldots, X_n$ erzeugt wird. Betrachten wir nun das inverse System

$$\ldots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^k) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{k-1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^2) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I),$$

welches von den kanonischen Projektionen $R/I^k \to R/I^{k-1}$ induziert wird, so liefern uns die Abbildungen aus (6.2) eine Abbildung von inversen Systemen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^k) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{k-1}) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{k-2}) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{k-1}) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{k-2}) & \longrightarrow & H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^{k-3}) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

und damit eine Abbildung

$$\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} (H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^k)) \longrightarrow \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} (H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^k)).$$

Nun gilt nach Satz 4.7.5 aber $D(H_I^i(R)) \cong \varprojlim_k (H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^k))$ und wir haben somit eine Abbildung

$$\Phi_\delta \,:\, D(H_I^i(R)) \longrightarrow D(H_I^i(R)),$$

welche von der $\Bbbk$-linearen Derivation δ induziert wurde.

Damit haben wir also die Wirkung von δ auf $D(H_I^i(R)$ bestimmt und wegen der Gleichheit (6.1) kann dies nun zu einer Aktion von $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ auf den Matlis-Dualen $D(H_I^i(R))$ erweitert werden, indem man das Folgende beachtet. Sei $s \in R$, dann gilt für jede $\Bbbk$-lineare Derivation $\delta \in \mathcal{D}(R;\Bbbk)$, $\delta(r \cdot s) = \delta(r) \cdot s + r \cdot \delta(s)$ für alle $r \in R$, und damit

$$r \cdot \delta(s) = \delta(r \cdot s) - \delta(r) \cdot s \qquad \forall r \in R.$$

Die Zuordnung $\delta \mapsto \Phi_\delta$ induziert also einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{D}(R;\Bbbk) \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(D(H_I^i(R))),$$

und damit eine (Links-)$\mathcal{D}$-Modul-Struktur auf $D(H_I^i(R))$. □

6.3 $D(H_I^i(R))$ ist im Allgemeinen nicht holonom

Der folgende Satz, den Lyubeznik in [Lyu93] bewiesen hat, zeigt, dass die holonomen $\mathcal{D}$-Moduln gewisse gute Endlichkeitsbedingungen erfüllen. Dies stellt das analoge Ergebnis zu den Sätzen 3.2.2, 3.4.6 und 3.4.5 für $\mathcal{F}$-endliche Moduln, in Charakteristik Null dar.

Satz 6.3.1 (Theorem 2.4 in [Lyu93]). *Sei* $\Bbbk$ *ein Körper der Charakteristik Null und sei* $R = \Bbbk[[X_1, \ldots . X_n]]$ *ein Potenzreihenring über* $\Bbbk$ *in* n *Variablen. Sei* M *außerdem ein* $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$*-Modul. Dann gilt:*

(i) Ist M *endlich erzeugt, so ist die Menge* $\mathrm{Ass}\, M$*, also die Menge der assoziierten Primideale von* M*, endlich.*

(ii) Falls M *holonom ist, so sind alle Bass-Zahlen von* M *endlich.*

(iii) $inj\, dim_R M \leq dim_R M$.

Beweis. [Lyu93, Theorem 2.4]. □

Da laut Satz 6.2.1 die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzen, können wir das folgende Korollar formulieren. Es stellt die analoge Aussage in Charakteristik Null bereit, welche Korollar 4.5.4 in positiver Charakteristik geliefert hat.

Korollar 6.3.2. *Sei* $\Bbbk$ *ein Körper der Charakteristik Null und* $R = \Bbbk[[X_1, \ldots . X_n]]$ *ein Potenzreihenring über* $\Bbbk$ *in* n *Variablen. Dann sind die Matlis-Duale* $D(H_I^i(R))$ *im Allgemeinen keine endlich erzeugten* $\mathcal{D}$*-Moduln. Insbesondere sind sie nicht holonom.*

Beweis. Nach Satz 5.1.2 und 5.1.3 besitzen die Moduln $D(H_I^i(R))$ im Allgemeinen unendlich viele assoziierte Primideale. Die Behauptung folgt damit aus 6.3.1. □

Kapitel 7

Anwendung von $\mathcal{F}$-Moduln: $\mathcal{D}$-Moduln in positiver Charakteristik

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass endlich erzeugte $\mathcal{D}$-Moduln bzw. holonome $\mathcal{D}$-Moduln über einem Potenzreihenring $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ ganz ähnliche Endlichkeitsbedingungen erfüllen wie unsere $\mathcal{F}$-endlichen Moduln in Abschnitt 3.4. Hingegen erfüllten die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ diese Bedingungen im Allgemeinen nicht, was unserem Ergebnis aus positiver Charakteristik, dass diese Moduln im Allgemeinen nicht $\mathcal{F}$-endlich sind, in Charakteristik Null entspricht. Es sei daran erinnert, dass wir in Charakteristik $p > 0$ aber voraussetzen mussten, dass $\Bbbk$ perfekt ist.

In diesem Kapitel wollen wir nun einen noch engeren Zusammenhang zwischen $\mathcal{F}$-Moduln und $\mathcal{D}$-Moduln herstellen. Dies wird sich dadurch ergeben, dass wir das Konzept der $\mathcal{D}$-Moduln aus dem letzten Kapitel in die positive Charakteristik übertragen. Wir werden also zu Beginn $\mathcal{D}$-Moduln in Charakteristik $p > 0$ definieren und dann zeigen, dass jeder $\mathcal{F}$-Modul auch eine solche $\mathcal{D}$-Modul-Struktur trägt. Dabei wird sich herausstellen, dass dann gerade die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln $\mathcal{D}$-Moduln endlicher Länge entsprechen.

7.1 Der Ring der Differentiale

Wir beginnen nun, ganz analog zum Fall der Charakteristik Null, mit der Definition und Einführung des Ringes $\mathcal{D}(R)$ der Differentiale über einem Ring R. Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass dieser Ring in Charakteristik Null für $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ noethersch ist. Diese Tatsache sorgte dafür, dass endlich erzeugte $\mathcal{D}$-Moduln wieder noethersch sind und damit wichtige Endlichkeitsbedingungen, wie zum Beispiel die Existenz von nur endlich vielen assoziierten Primidealen, erfüllen. Im Folgenden wird sich zeigen, dass der Ring der Differentiale $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$ eines Polynomringes R über einem Körper $\Bbbk$ und auch der Ring der Differentiale eines Potenzreihenringes in positiver Charakteristik nicht mehr noethersch sind. Die endlich erzeugten $\mathcal{D}$-Moduln, deren Struktur durch eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur induziert ist, erfüllen allerdings analoge Endlichkeitsbedingungen.

Sei also $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei R eine $\Bbbk$-Algebra. Wir können dann ganz analog wie in Kapitel 6 den Ring $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ der $\Bbbk$-linearen Differentiale auf R definieren.

Bemerkung 7.1.1. *Genau wie im Fall* $char\,\Bbbk = 0$ *sei* $\mathcal{D}_0(R;\Bbbk) = R$, *aufgefasst als Unterring von* $End_\Bbbk(R)$, *und für jedes* $i \geq 0$ *sei*

$$\mathcal{D}_{i+1}(R;\Bbbk) = \{f \in End_\Bbbk(R) \mid [f,r] \in \mathcal{D}_i(R;\Bbbk)\,\forall\, r \in R\}.$$

Dann bezeichnen wir die $\Bbbk$*-Unteralgebra*

$$\mathcal{D}(R;\Bbbk) = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{D}_i(R;\Bbbk)$$

von $End_\Bbbk(R)$ *als* ***Ring der*** $\Bbbk$***-linearen Differentiale auf*** R *und die Abbildungen aus* $\mathcal{D}_i(R;\Bbbk)$ *heißen* ***Differentiale der Ordnung*** $\leq i$.

Sei nun $R = \Bbbk[X_1,\dots,X_n]$ ein Polynomring in endlich vielen Variablen oder $R = \Bbbk[[X_1,\dots,X_n]]$ der Potenzreihenring in den Unbestimmten $X_1,\dots,X_n$. Dann hatten wir im letzten Kapitel gesehen, dass der Ring $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ im Fall $char\,\Bbbk = 0$ eine besonders einfache Gestalt besitzt. Er wird als $\Bbbk$-Unteralgebra von $End_\Bbbk(R)$ gerade von den Multiplikationen mit den X_i und durch die partiellen Ableitungen $\partial_i = \partial/\partial X_i$ erzeugt. Außerdem ist $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ noethersch und als R-Modul gilt

$$\mathcal{D}(R;\Bbbk) = \bigoplus_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} R\cdot\partial_1^{i_1}\cdots\partial_n^{i_n}.$$

Wir werden jetzt sehen, dass im Fall $char\,\Bbbk = p > 0$ die Situation nicht mehr so einfach ist. Insbesondere zeigt sich, dass der Ring der $\Bbbk$-linearen Differentiale $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ auf R dann nicht mehr endlich erzeugt ist als $\Bbbk$-Algebra und es zeigt sich, dass er nicht mehr noethersch ist. Wir bemerken dazu das Folgende:

Bemerkung 7.1.2. *Sei* $char\,\Bbbk = p > 0$ *und sei* $R = \Bbbk[X_1,\dots,X_n]$ *der Polynomring oder* $R = \Bbbk[[X_1,\dots,X_n]]$ *der Potenzreihenring in* n *Unbestimmten. Sei außerdem* $\partial_i = \partial/\partial X_i$ *die partielle Ableitung bzgl.* X_i, *dann gilt für* $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\partial_i^p(X_i^k) = \begin{cases} \partial_i^{p-k}(1) = 0 & \text{für } k < p,\\ k\cdots(k-p+1)x^{k-p} = 0 & \text{für } k \geq p.\end{cases}$$

Dabei gilt die zweite Gleichung, da der entstehende Koeffizient durch p *teilbar ist. Wir sehen, dass damit*

$$\partial_i^p = 0$$

als Operator auf R *ist. Damit ist* $\partial_i^t = 0$ *für* $t \geq p = char\,\Bbbk$ *und* $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ *besitzt insbesondere nilpotente Elemente und damit Nullteiler (im Fall* $char\,\Bbbk = 0$ *ist* $\mathcal{D}_n(\Bbbk)$ *stets nullteilerfrei, siehe z.B. [Cou95, 1.2]). Betrachten wir nun für* $t \in \mathbb{N}$ *und* $1 \leq i \leq n$ *die Differentialoperatoren*

$$D_{t,i} = \frac{1}{t!}\frac{\partial^t}{\partial X_i^t},$$

dann stellen wir fest, dass diese Operatoren immer nicht-trivial von Ordnung t *sind. Dabei soll der Ausdruck* $D_{t,i}$, *welcher für* $t \geq p = char\,\Bbbk$ *im Grunde nicht wohldefiniert ist, so interpretiert* *werden, dass erst* $\frac{\partial^t}{\partial X_i^t}$ *ausgeführt wird und dann ist, falls möglich, mit* $p!$ *zu kürzen. Selbst in Charakteristik* $p > 0$ *gilt dann z.B.*

$$D_{p,i}(X_j X_i^p) = \frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial X_i^p}(X_j X_i^p) = \frac{1}{p!}p! X_j = X_j.$$

Wir sehen, dass damit der Differentialoperator $D_{p,i} = \frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial X_i^p}$ ein Element von $\mathcal{D}_p(R;\Bbbk)$ ist. Er ist aber offensichtlich kein Element von $\mathcal{D}_n(\Bbbk)$ bzw. $\widehat{\mathcal{D}}_n(\Bbbk)$, da $r \cdot \partial^p/\partial X_i^p = 0 \quad \forall r \in R$ gilt und damit $1/p! \notin R$. Damit erkennen wir, dass für $char\, \Bbbk = p > 0$ der Ring der $\Bbbk$-linearen Differentiale $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ größer ist als die Weyl-Algebra $\mathcal{D}_n(\Bbbk)$ bzw. die Potenzreihen-Weyl-Algebra $\widehat{\mathcal{D}}_n(\Bbbk)$. Die Situation in positiver Charakteristik ist also grundverschieden zur Situation in Charakteristik Null. Zusammenfassend haben wir:

Satz 7.1.3. *[Vgl. Example 5.3 (d),(e) in [Lyu97]] Sei* $\Bbbk$ *ein Körper der Charaktersitik* $p > 0$ *und sei* $R = \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ *ein Polynomring oder* $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ *der Potenzreihenring in* n *Unbestimmten. Dann wird der Ring der Differentiale auf* R*, also der Ring* $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ *als* R*-Algebra von der Menge*

$$\left\{\frac{1}{p^s!}\frac{\partial^{p^s}}{\partial X_i^{p^s}} \mid i \in \{1, \ldots, n\},\, s \in \mathbb{N}\right\}$$

erzeugt. Mit den Bezeichnungen aus der letzten Bemerkung wird $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ *als* R*-Algebra von der Menge von Differentialoperatoren*

$$\{D_{p^s,i} \mid i \in \{1, \ldots, n\},\, s \in \mathbb{N}\}$$

erzeugt. Insbesondere ist $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ *als* R*-Algebra nicht endlich erzeugt und folglich nicht noethersch (siehe [ea07, 23.21] bzw. [Smi86, 2.2]).*

Beweis. [Lyu97, Example 5.3 (d), (e)]. □

In obiger Situation ist $D(R;\Bbbk)$ als R-Algebra somit, anders als in Charakteristik Null (siehe Satz 6.1.5 und Beispiel 6.1.9), nicht von den partiellen Ableitungen ∂_i erzeugt. Man hat nun sogar eine aufsteigende Folge von R-Unteralgebren (siehe [Bli01, 3.2])

$$\mathcal{D}_R^{(0)} \subseteq \mathcal{D}_R^{(1)} \subseteq \mathcal{D}_R^{(2)} \subseteq \mathcal{D}_R^{(3)} \subseteq \ldots,$$

so dass $\mathcal{D}(R;\Bbbk) = \bigcup_i \mathcal{D}_R^{(i)}$. Dabei ist $\mathcal{D}_R^{(0)} = R$ und $\mathcal{D}_R^{(1)}$ ist die von 1 und den partiellen Ableitungen erzeugte R-Algebra, also z.B. $\mathcal{D}_R^{(1)} = R \oplus Der_{R/\Bbbk}$. Allgemein ist $\mathcal{D}_R^{(k)}$ für $k \geq 1$ als R-Algebra erzeugt von den Operatoren $D_{p^s,i}$ mit $s < k$.

7.2 Ein Funktor $\xi : \mathcal{F}$-mod $\longrightarrow \mathcal{D}$-mod

Wir werden jetzt eine weitere Möglichkeit kennenlernen, den Ring der Differentiale $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ zu beschreiben. Wir zeigen, dass der Ring der $\Bbbk$-linearen Differentiale in der Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} End_{R^{p^n}}(R)$ enthalten ist. Diese Tatsache wird es uns ermöglichen zu zeigen, dass jeder $\mathcal{F}$-Modul auch eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzt. Insbesondere werden wir einen Funktor $\xi : \mathcal{F}$-mod $\longrightarrow \mathcal{D}$-mod konstruieren, der jedem $\mathcal{F}$-Modul M einen $\mathcal{D}$-Modul $\xi(M)$ zuordnet. Dabei besitzen sowohl M als auch $\xi(M)$ dieselbe zugrundeliegende abelsche Gruppe, die Objekte unterscheiden sich also nur dadurch, dass darüber hinaus $\mathcal{D}(R;\mathbb{k})$ auf $\xi(M)$ operiert. In der speziellen Situation, dass $(R,\mathfrak{m},\mathbb{k})$ wie in Kapitel 4 ein kompletter regulärer lokaler Ring ist, $\mathbb{k}$ perfekt und $\mathbb{k}\subseteq R$ gilt, hatten wir in Korollar 4.5.4 gezeigt, dass die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur besitzen. Wir erhalten also insgesamt einen Beweis dafür, dass diese Moduln auch in positiver Charakteristik eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzen, was das Ergebnis von Hellus aus Satz 6.2.1 verallgemeinert. Wegen Satz 4.3.9 befinden wir uns dann gerade, bis auf Isomorphie, in der Situation $R=\mathbb{k}[[X_1,\ldots,X_n]]$.

Wir folgen nun weitgehend Blickle in [Bli01], die Ergebnisse über die Struktur von $\mathcal{D}(R,\mathbb{k})$ finden sich aber schon bei Smith in [Smi86] und der Funktor ξ wurde ursprünglich von Lyubeznik in [Lyu97] beschrieben.

Bemerkung 7.2.1. *Sei $\mathbb{k}$ ein Körper und R eine kommutative $\mathbb{k}$-Algebra. Betrachten wir die Multiplikationsabbildung $\mu: R\otimes_{\mathbb{k}} R\to R$ und setzen wir $\mathcal{I}_{R/\mathbb{k}}=\mathcal{I}:=ker\,\mu$. Dann gilt bzgl. der natürlichen $R\otimes_{\mathbb{k}} R$-Modulstruktur auf $End_{\mathbb{k}}(R)$, also $(r\otimes r')(\varphi)(x)=r\varphi(r'x)$ für $r,r'\in R$ und $\varphi\in End_{\mathbb{k}}(R)$, (siehe [Smi86, Theorem 1.4])*

$$\mathcal{D}_k(R;\mathbb{k})=Ann_{End_{\mathbb{k}}(R)}(\mathcal{I}^{k+1}).$$

Sei nun $char\,\mathbb{k}=p>0$. Als Ideal ist $\mathcal{I}$ gerade erzeugt von $\{r\otimes 1-1\otimes r\,|\,r\in R\}$ und $\mathcal{I}^{[p^n]}$ ist somit erzeugt von $\{r^{p^n}\otimes 1-1\otimes r^{p^n}\,|\,r\in R\}$. Sei nun $\delta\in\mathcal{D}_{p^n-1}(R;\mathbb{k})$, dann gilt $\mathcal{I}^{p^n}\delta=0$, ergo erst recht $\mathcal{I}^{[p^n]}\delta=0$ und damit $r^{p^n}\delta=\delta r^{p^n}$. Folglich ist $\delta\in End_{R^{p^n}}(R)$ und insgesamt gilt

$$\mathcal{D}(R;\mathbb{k})\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}} End_{R^{p^n}}(R).$$

Betrachten wir nun die Situation, dass $R=\mathbb{k}[[X_1,\ldots,X_n]]$ der Potenzreihenring über einem perfekten Körper $\mathbb{k}$ positiver Charakteristik p ist (wegen Satz 4.3.9 können wir auch einen regulären kompletten lokalen Ring $(R,\mathfrak{m},\mathbb{k})$, der den perfekten Körper $\mathbb{k}$ enthält, voraussetzen). Nach Satz 4.3.6 ist R dann endlich erzeugt über R^p. Seien $m_1,\ldots,m_s$ die zugehörigen Erzeuger, dann erzeugen diese R auch als Algebra über R^{p^k}. Damit ist das Ideal $\mathcal{I}_{R/R^{p^k}}$ erzeugt von der Menge $\{m_i\otimes 1-1\otimes m_i\,|\,i=1,\ldots,s\}$ und folglich gilt $\mathcal{I}^{sp^k}\subseteq\mathcal{I}^{[p^k]}$. Sei nun $\varphi\in End_{R^{p^k}}(R)$ gegeben, dann gilt wie oben $r^{p^k}\varphi=\varphi r^{p^k}$, also $\mathcal{I}^{[p^k]}\varphi=0$. Außerdem ist $\mathbb{k}$ perfekt, daher $\mathbb{k}\subseteq R^{p^k}$ und $\varphi\in End_{\mathbb{k}}(R)$. Damit gilt jetzt auch die Umkehrung von oben, wir haben $\mathcal{I}^{sp^k}\delta=0$ und schließlich $\varphi\in\mathcal{D}_{sp^k-1}(R;\mathbb{k})$.

Analog können wir auch vorgehen, falls R eine beliebige endlich erzeugte Algebra über R^p ist und wir erhalten somit den folgenden Satz.

Satz 7.2.2. *Sei R eine endlich erzeugte Algebra über R^p und sei $\mathbb{k}\subset R$ ein perfekter Körper der Charakteristik $p>0$. Dann gilt*

$$\mathcal{D}(R;\mathbb{k})=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} End_{R^{p^n}}(R).$$

Insbesondere ist $\mathcal{D}(R;\mathbb{k})$ für jeden perfekten Körper $\mathbb{k}\subset R$ gleich und wir können in diesem Fall einfach $\mathcal{D}(R)$ schreiben. □

Wir sind jetzt in der Lage zu zeigen, dass jeder $\mathcal{F}$-Modul auch ein $\mathcal{D}$-Modul ist. Wir machen zu Beginn die folgende Beobachtung:

Bemerkung 7.2.3. *Seien R ein Ring der Charakteristik $p > 0$, $\delta \in End_{R^{p^k}}(R)$, $r' \in R^{\varphi^k}$ und $r \in R$. Da R und R^{φ^k} dieselbe Menge zu Grunde liegt, können wir δ auch als Abbildung $R^{\varphi^k} \to R^{\varphi^k}$ auffassen und es gilt dann*

$$\delta(r'r) = \delta(r^{p^k} r') = r^{p^k} \delta(r') = \delta(r')r.$$

Das bedeutet, wir können δ auch als R-linearen Endomorphismus von Rechtsmoduln auffassen und umgekehrt. Also haben wir z.B.

$$End_{R^{p^k}}(R) = End_R(R^{\varphi^k}), \tag{7.1}$$

wobei die rechte Menge Endomorphismen von Rechtsmoduln enthält.

Außerdem hatten wir in Bemerkung 7.2.1 gezeigt, dass $\mathcal{D}(R; \Bbbk) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} End_{R^{p^n}}(R)$ gilt. Definieren wir nun $\mathcal{D}_R^{(k)} := \mathcal{D}(R; \Bbbk) \cap End_{R^{p^k}}(R)$. Dann besteht $\mathcal{D}_R^{(k)}$ gerade aus den Differentialoperatoren, die R^{p^k}-linear sind und dann sehen wir mit (7.1), dass $\mathcal{D}_R^{(k)} \subseteq End_R(R^{\varphi^k})$ gilt. Damit besitzen aber Moduln der Form $R^{\varphi^k} \otimes_R M$ mit einem R-Modul M eine natürliche $\mathcal{D}_R^{(k)}$-Modulstruktur.

Bemerkung 7.2.4. *Der iterierte Frobeniusfunktor $\mathcal{F}^k$ ist auf natürliche Art ein Funktor*

$$\mathcal{F}^k : R\text{-}mod \longrightarrow \mathcal{D}_R^{(k)}\text{-}mod.$$

Für einen gegebenen R-Modul M operiert $\delta \in \mathcal{D}_R^{(k)}$ dabei auf $\mathcal{F}^k(M) = R^{\varphi^k} \otimes_R M$ durch die Abbildung $\delta \otimes Id_M$, wobei wir δ als Endomorphismus von Rechtsmoduln auf R^{φ^k} auffassen.

Sei nun (M, θ) ein $\mathcal{F}$-Modul, dann ist wegen $\mathcal{D}(R, \Bbbk) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_R^{(k)}$ mit der letzten Bemerkung klar, wie wir M mit einer $\mathcal{D}$-Modul-Struktur versehen können. Definieren wir induktiv für $k \in \mathbb{N}$

$$\theta^{k+1} := \mathcal{F}(\theta^k) \circ \theta = \mathcal{F}^k(\theta) \circ \theta^k,$$

so ist $\theta^k : M \xrightarrow{\cong} R^{\varphi^k} \otimes_R M$ ein Isomorphismus. Nach obiger Bemerkung 7.2.4 ist $R^{\varphi^k} \otimes_R M$ auf natürliche Weise ein $\mathcal{D}_R^{(k)}$-Modul und via des Isomorphismus θ^{-1} also auch M. Der Differentialoperator $\delta \in \mathcal{D}_R^{(k)}$ operiert dabei auf M durch die Abbildung

$$(\theta^k)^{-1} \circ (\delta \otimes id_M) \circ \theta^k,$$

wie folgendes Diagramm veranschaulicht:

$$\begin{tikzcd} R^{\varphi^k} \otimes_R M \arrow[d, "(\delta\otimes Id_M)"'] & M \arrow[l, "\theta^k"'] \arrow[d, "\delta"] \\ R^{\varphi^k} \otimes_R M \arrow[r, "(\theta^k)^{-1}"] & M \end{tikzcd}$$

Da dies für alle $\delta \in \mathcal{D}_R^{(k)}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ funktioniert, können wir diese Konstruktion sogar für alle Elemente aus $\mathcal{D}(R; \Bbbk)$ durchführen und erhalten:

Satz 7.2.5. *Sei (M, θ) ein $\mathcal{F}$-Modul. Dann induziert die $\mathcal{F}$-Modul-Struktur, die durch θ gegeben ist, eine natürliche $\mathcal{D}$-Modul-Struktur auf M.*

Beweis. Wir haben uns noch von der Wohldefiniertheit der obigen Konstruktion zu überzeugen. Dies findet sich z.B. in [Bli01, Proposition 3.6]. □

Satz 7.2.6. *Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und $\Bbbk \subseteq R$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist die Zuordnung*

$$\xi : \mathcal{F}\text{-}mod \longrightarrow \mathcal{D}\text{-}mod$$

ein exakter Funktor, der mit Lokalisierung kommutiert.

Beweis. [Bli01, Proposition 3.7]. □

In positiver Charakteristik ist somit jeder $\mathcal{F}$-Modul auch ein $\mathcal{D}$-Modul. In Beispiel 4.5.5 haben wir außerdem gesehen, dass über einem Potenzreihenring $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ mit perfektem Residuenkörper $\Bbbk$ der Charakteristik $p > 0$ die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ $\mathcal{F}$-Moduln sind. Damit können wir die folgende Verallgemeinerung von Satz 6.2.1 formulieren, in welchem von Hellus gezeigt wurde, dass die Moduln $D(H_I^i(R))$ in Charakteristik Null $\mathcal{D}$-Moduln sind.

Korollar 7.2.7. *Sei $\Bbbk$ ein perfekter Körper und sei $R = [[X_1, \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring über $\Bbbk$ in n Unbestimmten. Sei außerdem $I \subseteq R$ ein Ideal von R. Dann sind die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ auf natürliche Weise (Links-)$\mathcal{D}$-Moduln.* □

Wir werden diese $\mathcal{D}$-Modul-Struktur im kommenden Abschnitt noch genauer untersuchen und wollen jetzt noch darauf eingehen, welche Eigenschaften ein $\mathcal{F}$-Modul M als $\mathcal{D}$-Modul besitzt, wenn der zu Grunde liegende Modul sogar $\mathcal{F}$-endlich ist.

Satz 7.2.8. *Sei R ein noetherscher regulärer Ring der Charakteristik $p > 0$, welcher als R^p-Modul endlich erzeugt ist und sei M ein einfacher $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Dann ist der $\mathcal{D}$-Modul $\xi(M)$ halbeinfach (siehe 6.1.14(v)) und von endlicher Länge.*

Beweis. [Bli01, Theorem 3.22]. □

Satz 7.2.9. *Sei R ein noetherscher regulärer Ring der Charakteristik $p > 0$, welcher als R^p-Modul endlich erzeugt ist. Wir nehmen weiter an, dass jeder $\mathcal{F}$-endliche Modul endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln besitzt. Sei nun M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul, dann besitzt $\xi(M)$ endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln. Insbesondere gilt:*

(i) R_f mit seiner gewöhnlichen $\mathcal{D}$-Modul-Struktur (siehe Bsp. 6.1.8(ii)) besitzt für jedes $f \in R$ endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln.

(ii) Die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(R)$ mit der üblichen $\mathcal{D}$-Modul-Struktur (siehe Bemerkung 6.1.14) besitzen endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln.

Beweis. Nach Voraussetzung ist M von endlicher Länge als $\mathcal{F}$-Modul. Damit ist dann aber nach Satz 7.2.8 $\xi(N)$, für einen einfachen Subquotienten N von M, von endlicher Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln und somit auch $\xi(M)$ von endlicher Länge als $\mathcal{D}$-Modul. Die Aussagen (i) und (ii) folgen aus der Tatsache, dass die gewöhnlichen $\mathcal{D}$-Modul-Strukturen jeweils durch eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur induziert sind und die zugrundeliegenden $\mathcal{F}$-Moduln nach Satz 3.5.6/Korollar 3.5.5, sogar $\mathcal{F}$-endlich sind. □

Insbesondere in der Situation eines Potenzreihenringes $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ über einem perfekten Körper positiver Charakteristik liefern die $\mathcal{F}$-endlichen Moduln somit sogar $\mathcal{D}$-Moduln endlicher Länge.

Korollar 7.2.10. *Sei R eine endlich erzeugte Algebra über einem noetherschen regulären lokalen Ring $(S, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ der Charakteristik $p > 0$, so dass S ein endlich erzeugter S^p-Modul ist und M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Dann besitzt $\xi(M)$ endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln. Insbesondere gilt wieder:*

(i) R_f mit seiner gewöhnlichen $\mathcal{D}$-Modul-Struktur besitzt für jedes $f \in R$ endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln.

(ii) Die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^i(R)$ besitzen endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln.

Beweis. Nach Satz 3.4.7 besitzen unter den gegebenen Voraussetzungen alle $\mathcal{F}$-endlichen Moduln auch endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln. Außerdem ist R endlich über S und damit auch über R^p, da S endlich ist über S^p. Damit folgt die Behauptung sofort aus Satz 7.2.9. □

Korollar 7.2.11. *Sei $R = \Bbbk[[X_1, \dots X_n]]$ ein Potenzreihenring in n Variablen über dem perfekten Körper $\Bbbk$ der Charakteristik $p > 0$. Dann besitzt jeder $\mathcal{F}$-endliche Modul M endliche Länge in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln.*

Beweis. Der Potenzreihenring $R = \Bbbk[[X_1, \dots X_n]]$ ist als noetherscher kompletter regulärer lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$ eine endlich erzeugte Algebra über sich selbst. Damit ist also $R/\mathfrak{m} = \Bbbk$ perfekt und somit nach Satz 4.3.3 R ein endlich erzeugter R^p-Modul. Damit folgt die Behauptung aus dem letzten Korollar. □

7.3 $\mathcal{D}$-Modul-Struktur von $D(H_I^i(R))$ in Charakteristik $p > 0$

Sei $R = \Bbbk[[X_1, \dots, X_n]]$ ein Potenzreihenring über dem perfekten Körper $\Bbbk$. Betrachten wir nun noch einmal die für uns besonders interessanten Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$. Wir haben im Laufe dieser Arbeit gesehen, dass diese Moduln im Fall positiver Charakteristik eine $\mathcal{F}$-Modul-Struktur besitzen, im Allgemeinen aber nicht $\mathcal{F}$-endlich sind. In Charakteristik Null konnten wir ganz analog zeigen, dass die Moduln $D(H_I^i(R))$ eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur tragen, aber im Allgemeinen nicht endlich erzeugt sind in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln. Wir haben gerade gesehen, dass in Charakteristik $p > 0$ jeder $\mathcal{F}$-Modul auch ein $\mathcal{D}$-Modul ist und folglich sind auch die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ $\mathcal{D}$-Moduln. Insgesamt können wir zusammenfassend folgendes Ergebnis formulieren.

Satz 7.3.1. *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring beliebiger Charakteristik, der seinen perfekten Residuenkörper $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$ enthält. Sei außerdem $I \subset R$ ein Ideal und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Falls $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$, dann sind die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ $\mathcal{F}$-Moduln, die im Allgemeinen nicht $\mathcal{F}$-endlich sind.

(ii) $D(H_I^i(R))$ ist in beliebiger Charakteristik ein $\mathcal{D}$-Modul.

(iii) In Charakteristik Null sind die Moduln $D(H_I^i(R))$ im Allgemeinen nicht endlich erzeugt als $\mathcal{D}$-Moduln, insbesondere also nicht holonom.

Beweis. Die erste Aussage ist gerade die Aussage aus Korollar 5.1.7. Wegen Satz 6.2.1 in Charakteristik Null und Korollar 7.2.7 in positiver Charakteristik sind die Moduln $D(H_I^i(R))$ $\mathcal{D}$-Moduln und es gilt (ii). Angenommen sie wären im Fall $char\,\Bbbk = 0$ endlich erzeugte $\mathcal{D}$-Moduln, dann wäre nach Satz 6.3.1 die Menge der assoziierten Primideale $Ass\,D(H_I^i(R))$ endlich, was aber nach Satz 5.1.2 bzw. Satz 5.1.3 im Allgemeinen falsch ist. Dies war gerade auch die Aussage von Korollar 6.3.2 und folglich gilt (iii). □

In Satz 3.4.4 hatten wir gesehen, dass $\mathcal{F}$-endliche Moduln noethersch sind in der Kategorie der $\mathcal{F}$-Moduln. Analog hatten wir im Fall $R = \Bbbk[[X_1, \ldots, X_n]]$ und $char\,\Bbbk = 0$ gesehen, dass endlich erzeugte $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$-Moduln noethersch sind in der Kategorie der $\mathcal{D}$-Moduln, da der Ring $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ selbst noethersch ist (siehe Satz 6.1.13). Diese Tatsachen machten es uns möglich, von der Existenz unendlich vieler assoziierter Primideale der Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ (siehe Satz 5.1.3) sofort darauf zu schließen, dass diese Moduln nicht $\mathcal{F}$-endlich bzw. nicht endlich erzeugt als $\mathcal{D}$-Moduln sind. Im Fall positiver Charakteristik ist der Ring der Differentiale $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$ allerdings nicht noethersch (siehe Satz 7.1.3). Wir können in dieser Situation demzufolge nicht entscheiden, ob die Matlis-Duale $D(H_I^i(R))$ im Allgemeinen endlich erzeugte $\mathcal{D}$-Moduln sind oder nicht. Diese Frage bleibt offen.

Sei nun wieder $R = \Bbbk[[X_1 \ldots, X_n]]$ der Potenzreihenring über einem perfekten Körper $\Bbbk$ der Charakteristik $p > 0$. Wir haben gerade gesehen, dass dann die Moduln $D(H_I^i(R))$ $\mathcal{D}$-Moduln sind. In Charakteristik Null hatte Satz 6.2.1 das analoge Ergebnis geliefert, wobei die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur dort von gewissen $\Bbbk$-linearen Projektionen

$$R/I^\nu \longrightarrow R/I^{\nu-1} \text{ für } \nu \geq 1 \tag{7.2}$$

induziert wurde, welche wiederum durch eine $\Bbbk$-lineare Derivation $\delta \in \mathcal{D}(R;\Bbbk)$ induziert waren. Satz 7.2.5 hat uns nun gezeigt, wie wir in Charakteristik $p > 0$ auf den $\mathcal{F}$-Moduln $D(H_I^i(R))$ eine $\mathcal{D}$-Modul-Struktur erhalten. Wir wollen diese Struktur jetzt nochmals genauer betrachten und werden sehen, dass auch in diesem Fall die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur durch $\Bbbk$-lineare Projektionen

$$\pi_k^\delta : R/I^{[p^k]} \longrightarrow R/I^{[p^{k-1}]} \text{ für } k \geq 1 \tag{7.3}$$

induziert wird. Diese Projektionen sind ihrerseits wieder durch ein $\Bbbk$-lineares Differential $\delta \in \mathcal{D}(R;\Bbbk)$ gegeben. Sei nun $\theta : D(H_I^i(R)) \to \mathcal{F}(D(H_I^i(R)))$ der Strukturmorphismus des $\mathcal{F}$-Moduls $D(H_I^i(R))$ und sei δ ein Element des Ringes der Differentiale $\mathcal{D}(R;\Bbbk)$. Dann wissen wir nach Satz 7.2.2, dass ein $t \in \mathbb{N}$ existiert, so dass δ R^{p^t}-linear ist. Damit wird die Wirkung von δ auf $D(H_I^i(R))$ gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} R^{\varphi^t} \otimes_R D(H_I^i(R)) & \xleftarrow{\theta^t} & D(H_I^i(R)) \\ {\scriptstyle (\delta \otimes Id_D)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ R^{\varphi^t} \otimes_R D(H_I^i(R)) & \xrightarrow{(\theta^t)^{-1}} & D(H_I^i(R)). \end{array}$$

In Satz 4.7.5 haben wir gezeigt, dass das Matlis Duale $D(H_I^i(R))$ auch als inverser Limes von bestimmten lokalen Kohomologiemoduln dargestellt werden kann, und zwar galt

$$D(H_I^i(R)) \cong \varprojlim_k (H_{\mathfrak{m}}^{n-i}(R/I^k)).$$

Betrachten wir den Beweis dieser Gleichheit nochmals genauer, so erhalten wir die folgenden Gleichungen. Dabei verwenden wir wieder die lokale Dualität (Satz 2.4.6) und die Tatsache, dass der Matlis-Funktor mit dem Frobenius-Funktor kommutiert (Satz 4.6.8) und direkte Systeme in inverse Systeme überführt (siehe 4.7.4). Außerdem verwenden wir noch gewisse Vertauschbarkeiten von Frobenius-Funktor und Ext-Funktoren sowie die Vertauschbarkeit von $\mathcal{F}$ mit direkten Limites (Bemerkung 4.7.1). Außerdem wird benutzt, dass R ein $\mathcal{F}$-Modul ist (Beispiel 3.1.3).

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^t(D(H^i_I(R))) &= R^{\varphi^t} \otimes_R D(H^i_I(R)) \\
&\cong D(\mathcal{F}^t(H^i_I(R))) \\
&\cong D(\mathcal{F}^t(\varinjlim_s Ext^i_R(R/I^{[p^s]}, R))) \\
&\cong D(\varinjlim_s Ext^i_R(R/I^{[p^{s+t}]}, R)) \\
&\cong \varprojlim_s D(Ext^i_R(R/I^{[p^{s+t}]}, R)) \\
&\cong \varprojlim_s D(Ext^i_R(R/I^{[p^{s+t}]}, R)) \\
&\cong \varprojlim_s H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^{s+t}]}) \\
&\cong \varprojlim_s \mathcal{F}^t(H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^s]})) \\
&= \varprojlim_s R^{\varphi^t} \otimes_R H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^s]})
\end{aligned}$$

Damit kann die Wirkung des Differentials δ auf den Matlis-Dualen $D(H^i_I(R))$ auch als eine Abbildung zwischen dem inversen Limes $\varprojlim R^{\varphi^t} \otimes_R H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^s]})$ interpretiert werden. Dies entspricht gerade einer Abbildung

$$\lambda^\delta : \varprojlim_s H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^{t+s}]}) \longrightarrow \varprojlim_s H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^{t+s}]}). \tag{7.4}$$

Das folgende Diagramm veranschaulicht die Situation (dabei setzen wir $k = t + s$):

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim R^{\varphi^t} \otimes H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^s]}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \varprojlim H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^k]}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\lambda^\delta"'] & R^{\varphi^t} \otimes D(H^i_I(R)) \arrow[d, "(\delta\otimes Id_D)"'] & D(H^i_I(R)) \arrow[l, "\theta^t"'] \arrow[d, "\delta"'] \\
\varprojlim R^{\varphi^t} \otimes H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^s]}) \arrow[r, "\cong"] & \varprojlim H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^k]}) \arrow[r, "\cong"] & R^{\varphi^t} \otimes D(H^i_I(R)) \arrow[r, "(\theta^t)^{-1}"] & D(H^i_I(R)).
\end{tikzcd}$$

Nun wissen wir aber, dass δ auf $R^{\varphi^t} \otimes_R H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I)$ durch $\delta \otimes Id_H$ operiert, wobei wir δ als einen Rechtshomomorphismus auf R^{φ^t} auffassen, was nach 7.2.3 möglich ist, da δ R^{p^t}-linear ist. Damit ist die Abbildung λ^δ gerade durch die folgenden Abbildungen λ^δ_k gegeben, welche durch die Zusammensetzung von δ und λ_k entsteht.

$$\begin{tikzcd}
R^{\varphi^t} \otimes_R H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^s]}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\delta\otimes Id_H"] & H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^k]}) \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, dashed, "\lambda^\delta_t"] & \\
R^{\varphi^t} \otimes_R H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^s]}) \arrow[r, "\cong"] & H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^k]}) \arrow[r, "\lambda_t"] & H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^{k-1}]})
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die Abbildungen $\lambda_k : H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^k]}) \to H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/I^{[p^{k-1}]})$ gerade durch die kanonischen Projektionen

$$\pi_t : R/I^{[p^k]} \longrightarrow R/I^{[p^{k-1}]} \tag{7.5}$$

induziert. Insgesamt ist damit die Wirkung von δ auf den Matlis-Dualen $D(H^i_I(R))$ durch die folgenden Abbildungen $\pi^\delta_k : R/I^{[p^k]} \to R/I^{[p^{k-1}]}$ induziert, wobei $\pi^\delta_k = \pi_k \circ \delta$.

$$\begin{tikzcd}
R^{\varphi^k} \otimes_R R/I \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\delta \otimes Id_{R/I}"] & R/I^{[p^k]} \arrow[d, "\boldsymbol{\delta}"] \arrow[dr, dashed, "\pi^\delta_k"] & \\
R^{\varphi^k} \otimes_R R/I \arrow[r, "\cong"] & R/I^{[p^k]} \arrow[r, "\pi_t"] & R/I^{[p^{k-1}]}
\end{tikzcd}$$

Folglich sehen wir, dass wir die $\mathcal{D}$-Modul-Struktur in positiver Charakteristik auf ganz ähnliche Weise wie im Fall $char\, \Bbbk = 0$ aus Satz 6.2.1 erhalten.

Kapitel 8

Ausblick

Als Abschluss dieser Arbeit soll an dieser Stelle kurz auf offen gebliebene Fragen und weiterführende Forschungsideen innerhalb der behandelten Thematik aufmerksam gemacht werden. Dabei soll zum einen kurz dargestellt werden, wie sich möglicherweise die Frage aus Abschnitt 5.2, ob ein gegebener lokaler Kohomologiemodul artinsch ist, mit Hilfe des verallgemeinerten Matlis-Duals $\mathfrak{D}$ aus Abschnitt 4.8 beantworten lässt. Außerdem wollen wir eine mögliche Verallgemeinerung des Begriffes "holonom" in Charakteristik Null für $\mathcal{D}$-Moduln positiver Charakteristik diskutieren. Als Letztes soll dann auf eine Technik aufmerksam gemacht werden, die Hochster in [Hoc75] benutzt hat, um Aussagen über Strukturen in Charakteristik $p > 0$ auf solche in Charakteristik Null zu übertragen. Insbesondere stellt sich dann die Frage, ob mit ähnlichen Methoden vielleicht das Problem der Macaulay-Kurve C_4, welches uns als Motivation unserer Arbeit diente neu untersucht werden kann (siehe Einleitung bzw. Kapitel 5).

8.1 Artinsche lokale Kohomologiemoduln und $\mathcal{F}$-Endlichkeit

Wir haben in Abschnitt 4.8 gesehen, dass uns das verallgemeinerte Matlis-Dual $\mathfrak{D}$ für einen kompletten regulären lokalen Ring $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ und einen Quasi-$\mathcal{F}$-Modul (M, β), der als R-Modul artinsch ist, sogar einen $\mathcal{F}$-endlichen Modul $\mathfrak{D}(M)$ liefert. Insbesondere gilt die folgende Implikation

$$H_I^i(M) \text{ artinscher Quasi-}\mathcal{F}\text{-Modul} \Longrightarrow \mathfrak{D}(H_I^i(M)) \ \mathcal{F}\text{-endlich},$$

und somit also auch

$$\mathfrak{D}(H_I^i(M)) \text{ nicht } \mathcal{F}\text{-endlich} \Longrightarrow H_I^i(M) \text{ nicht artinsch.}$$

Damit liefert uns die Berechnung der verallgemeinerten Matlis-Duale $\mathfrak{D}(H_I^i(M))$ zumindest im Fall $M = R/\mathfrak{a}$ mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ eine Möglichkeit die Frage aus Abschnitt 5.2, ob ein gegebener lokaler Kohomologiemodul artinsch ist, auf die Frage nach der $\mathcal{F}$-Endlichkeit der Moduln $\mathfrak{D}(H_I^i(M))$ zurückzuführen. Wir hatten in Beispiel 4.8.2 gesehen, dass die R-Moduln der Form $R/\mathfrak{a}$ Quasi-$\mathcal{F}$-Modul sind und damit stellen sich die folgenden Fragen:

- Welche R-Moduln M sind Quasi-$\mathcal{F}$-Moduln, bzw. wie kann man diese Frage entscheiden?

- Sind genauere Beschreibungen der Moduln $\mathfrak{D}(H^i_I(M))$ möglich, bzw. wie können diese Moduln auf $\mathcal{F}$-Endlichkeit getestet werden?

In Abschnitt 4.8 konnten wir das folgende Beispiel angegeben, welches obige Fragen motivierte.

Beispiel 8.1.1 (siehe Satz 4.8.3)**.** *Sei $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ ein kompletter regulärer lokaler Ring der Charakteristik $p > 0$, wobei $\Bbbk \subseteq R$ perfekt ist und $\dim R = n$. Sei außerdem $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt*

$$\mathfrak{D}(H^i_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{a})) \cong H^{n-i}_{\mathfrak{a}}(R).$$

In Satz 4.8.4 konnten wir dies unter gewissen weiteren Annahmen noch etwas allgemeiner ausdrücken und auch verallgemeinerte Matlis-Duale der Form $\mathfrak{D}(H^i_I(R/\mathfrak{a}))$ näher beschreiben. Wir konnten aber nicht entscheiden, ob diese $\mathcal{F}$-endlich sind und somit auch die Frage, ob die zugrundeliegenden lokalen Kohomologiemoduln artinsch sind, nicht entscheiden.

8.2 Holonome Moduln in positiver Charakteristik

Unsere Untersuchungen (siehe Satz 6.3.1) haben gezeigt, dass für einen Potenzreihenring der Charakteristik Null holonome $\mathcal{D}$-Moduln stets endliche Bass-Zahlen und nur endlich viele assoziierte Primideale besitzen. In positiver Charakteristik gilt das analoge Ergebnis für $\mathcal{F}$-endliche Moduln (siehe Satz 3.4.6/Satz 3.4.5). Insbesondere hatten Huneke und Sharp in [HS93] zeigen können, dass für einen regulären Ring $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ und ein Ideal $I \subseteq R$ die Inklusion

$$Ass\, H^i_I(R) \subseteq Ass\, Ext^i_R(R/I, R)$$

gilt. Dies ist in Charakteristik Null nicht mehr richtig, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 8.2.1 (siehe Example 21.31 in [ea07])**.** *Sei $\Bbbk$ ein Körper und $R = \Bbbk[u, v, w, x, y, z]$ ein Polynomring über $\Bbbk$. Sei I das von den 2×2 Minoren der Matrix*

$$\begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

erzeugte Ideal von R. Es ist also $I = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ mit

$$\Delta_1 = vz - wy, \qquad \Delta_2 = wx - uz, \qquad \Delta_3 = uy - vx.$$

Dann gilt $depth_R(I, R) = 2$ und damit $H^2_I(R) \neq 0$. Außerdem ist R/I Cohen-Macaulay und somit gilt im Fall $char\, \Bbbk = p > 0$ wegen Satz 4.8.5, $H^3_I(R) = 0$. Im Fall $char\, \Bbbk = 0$ konnte aber gezeigt werden, dass $H^3_I(R) \neq 0$ gilt. Außerdem gilt in diesem Fall $Ext^3_R(R/I, R) = 0$ (siehe [ea07, 22.12]) und damit

$$Ass\, H^i_I(R) \not\subseteq Ass\, Ext^i_R(R/I, R).$$

Dies zeigt, dass es sehr große Unterschiede zwischen beiden Fällen gibt. Insbesondere musste in Charakteristik Null ein holonomer $\mathcal{D}$-Modul vorausgestezt werden, um die Endlichkeit der Bass-Zahlen zu zeigen (siehe Satz 6.3.1). Startet man allerdings mit einem $\mathcal{F}$-endlichen Modul M, so erhält man wegen Satz 7.2.5 und Satz 3.4.6 automatisch einen $\mathcal{D}$-Modul M, dessen Bass-Zahlen sämtlich endlich sind. Es stellt sich also natürlicherweise die Frage, wie sich dies in der $\mathcal{D}$-Modul-Struktur von M widerspiegelt. Wir interessieren uns also für genauere Zusammenhänge zwischen der $\mathcal{F}$- und der $\mathcal{D}$-Modul-Struktur von M. Ein erster Schritt wäre es, den Begriff eines holonomen $\mathcal{D}$-Moduls in die positive Charakteristik zu transferieren. Erste Ergebnisse zu diesem Thema finden sich z.B. in den Arbeiten [Bav09] und [Bö02], in denen versucht wurde Begriffe wie holonom, Bernstein-Ungleichung oder Gelfand-Kirillov-Dimension in den Fall von Prim-Charakteristik zu übertragen. Angenommen man hätte eine passende Definition von holonom auch in positiver Charakteristik gefunden, so gäbe es Grund zu der Annahme das Folgende zu vermuten.

Vermutung 8.2.2. *Sei R ein kommutativer noetherscher regulärer Ring der Charakteristik $p > 0$ und sei M ein $\mathcal{F}$-endlicher Modul. Dann ist M als $\mathcal{D}$-Modul holonom.*

8.3 Anwendung von Charakteristik p Methoden in Charakteristik Null

Wir hatten unserer Interesse an den Matlis-Dualen $D(H^i_I(R))$ lokaler Kohomologiemoduln in Kapitel 5 dadurch motiviert, dass diese Moduln die nötigen Informationen kodieren, um zu entscheiden, ob ein gegebenes Ideal I mengentheoretisch vollständiger Durchschnitt ist. Konkret stellten wir uns die Frage, ob die berühmte Macaulay-Kurve C_4 auch in Charakteristik Null vollständiger Durchschnitt ist. In Charakteristik $p > 0$ konnte dies schon positiv beantwortet werden (siehe z.B. [BSR81]). Wir wollen jetzt eine Konstruktion vorstellen, die es Hochster in [Hoc75] ermöglichte die Existenz von “big Cohen-Macaulay Moduln” in Charaktersitik Null zu zeigen, indem er das Problem so reduzierte, dass es reichte es in positiver Charakteristik zu beweisen. Wir orientieren uns dabei an der Monographie von Bruns und Herzog [BH98, §8].

Seien $\mathbf{X} = X_1, \dots, X_n$, $\mathbf{Y} = Y_1, \dots, Y_m$ Familien von unabhängigen Unbekannten über $\mathbb{Z}$. Dann heißt eine Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ einfach ein ***System von Gleichungen*** über $\mathbb{Z}$. Es besitzt eine ***Lösung der Höhe*** n in einem noetherschen Ring R, falls Familien $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$, $\mathbf{y} = y_1, \dots, y_m$ in R existieren, so dass $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \, \forall p \in \mathcal{E}$, und $height\, \mathbf{x}R = n$ gilt. Hochster hat nun den folgenden Satz formuliert.

Satz 8.3.1 (Theorem 8.4.1 in [BH98])**.** *(i) Angenommen ein System von Gleichungen $\mathcal{E}$ besitzt eine Lösung der Höhe n in einem noetherschen Ring R, der einen Körper $\Bbbk$ enthält. Dann besitzt $\mathcal{E}$ eine Lösung $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ in einem lokalen Ring R' der Charakteristik $p > 0$, so dass $\mathbf{x}'$ ein Parametersystem von R' bildet.*

(ii) Ist R zusätzlich ein regulärer lokaler Ring, so dass $\mathbf{x}$ ein reguläres Parametersystem bildet, dann kann der Ring R' aus (i) als regulärer lokaler Ring mit regulärem Parametersystem $\mathbf{x}'$ gewählt werden.

Dies motiviert nun das folgende Vorgehen, um eine Aussage $\mathcal{A}$ für einen noetherschen Ring R zu beweisen, welcher einen Körper $\Bbbk$ der Charakteristik Null enthält.

(i) Zeige, dass $\mathcal{S}$ für alle lokalen Ringe der Charakteristik $p > 0$ gilt,

(ii) Zeige, dass eine Familie $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ von Gleichungssystemen existiert mit der Eigenschaft, dass die Aussage $\mathcal{A}$ genau dann für R gilt, wenn keines der Systeme $\mathcal{E}_i$ eine Lösung von bestimmter Höhe besitzt.

Denn angenommen, die Aussage $\mathcal{A}$ gelte nicht für R, dann müsste eines der Systeme $\mathcal{E}_i$ eine Lösung bestimmter Höhe besitzen. Dann müsste nach obigem Satz aber auch eine Lösung in einem lokalen Ring R' existieren. Damit erfüllt R' aber wegen (ii) nicht $\mathcal{A}$ und dies widerspricht gerade (i).

Sei nun $R = \Bbbk[[x, y, z, w]]$ der Potenzreihenring über einem Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei I das zu C_4 gehörige Ideal. Dann existieren $f, g \in R$, so dass $\sqrt{I} = \sqrt{f, g}$ gilt. In Charakteristik Null wissen wir nur, dass es Elemente $p, q, r \in R$ gibt, die das Ideal I bis auf Radikal beschreiben. Es stellt sich also die Frage, ob es möglich ist die obige Technik zu verwenden, um zu zeigen, dass auch in diesem Fall zwei Gleichungen genügen.

Literaturverzeichnis

[Agh09] M. Aghapour, *Cofiniteness of local cohomology modules of dimension one ideals in non-local case*, Vortrag - Tarbiat Moallem University, 20th Seminar on Algebra, 2-3 Ordibehesht, 1388 (Apr. 22-23, 2009) pp 11-13, 2009.

[AM69] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., 1969.

[AMBL05] J. Alvarez-Montaner, M. Blickle, and G. Lyubeznik, *Generators of D-modules in positive characteristic*, Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 4, 459–473.

[Bav09] V. V. Bavula, *Dimension, multiplicity, holonomic modules, and analogue of the inequality of Bernstein for rings of differential operators in prime characteristic*, Representation Theory **13** (2009), 182–227.

[BH98] J. Bruns and W. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics, no. 39, Cambridge University Press, New York, 1998.

[Bjö79] J.E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 21, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.

[Bli01] M. Blickle, *The intersection homology D-module in finite characteristic*, Ph.D. thesis, University of Michigan, 2001.

[Bli03] ———, *The D-module structure of R[F]-modules*, Trans. Am. Math. Soc. **355** (2003), no. 4, 1647–1668.

[Bli04] ———, *The intersection homology D-module in finite characteristic*, Math. Ann. **328** (2004), 425–450.

[BN08] K. Bahmanpour and R. Naghipour, *Associated primes of local cohomology modules and Matlis duality*, Journal of Algebra **320** (2008), 2632–2641.

[BS08] M.P. Brodmann and R.Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge studies in advanced mathematics, no. 60, Cambridge University Press, New York, 2008.

[BSR81] B. Bresinsky, J. Stückrad, and B. Renschuch, *Mengentheoretisch vollständige Durchschnitte verschiedener rationaler Raumkurven im $\boldsymbol{P}^3$ über Körpern von Primzahlcharakteristik*, Math. Nachr. **104** (1981), 147–169.

[BW95] R. Belshoff and C. Wickham, *A note on local duality*, Bull. London Math. Soc. **29** (1995), 25–31.

[Bö02] R. Bögvad, *An anlogue of holonomic D-modules on smooth varieties in positive characteristics*, Homology, Homotopies and Applications **4** (2002), no. 2, 83–116.

[Cou95] S.C. Coutinho, *A Primer of algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts, no. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[DAT99] K. Divaani-Aazar and M. Tousi, *Some remarks about coassociated primes*, J. Korean Math. Soc. **36** (1999), no. 5, 847 – 853.

[DM97] D. Delfino and T. Marley, *Cofinite modules and local cohomology*, Journal of Pure and Applied Algebra **121** (1997), 45–52.

[DY08] M. T. Dibaei and S. Yassemi, *Bass numbers of local cohomology modules with respect to an ideal*, Algebr Represent Theor **11** (2008), 299–306.

[IY07] S.B. Iyengar et al., *Twenty-Four Hours of Local Cohomology*, Graduate Studies in Mathematics, no. 87, American Mathematical Society, Rhode Island, 2007.

[EH08] F. Enescu and M. Hochster, *The Frobenius structure of local cohomology*, to appear in J. Algebra and Number Theory (2008), preprint.

[Ein35] A. Einstein, *Professor Einstein writes in Appreciation of a Fellow-Mathematician.*, 1935, Ney York Times, 5 May 1935, Online at the MacTutor History of Mathematics archive.

[Eis04] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, no. 150, Springer, New York, 2004.

[Gro67] A. Grothendieck, *Local cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, no. 41, Springer, Berlin, 1967.

[Gro68] ______, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA2)*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[Har70] R. Hartshorne, *Affine duality and cofiniteness*, Inventiones math. **9** (1970), no. 2, 145–164.

[Har79] ______, *Complete intersections in charakteristic $p > 0$*, Amer. J. math. **101** (1979), 380–383.

[Hel05a] M. Hellus, *Local cohomology and complete intersections of arithmetic rank one*, preprint (2005).

[Hel05b] ______, *On the associated primes of Matlis duals of top local cohomology modules*, Comm. Algebra **33** (2005), no. 11, 3997–4009.

[Hel07a] ______, *Finiteness properties of duals of local cohomology modules*, Comm. Algebra **35** (2007), no. 11, 3590–3602.

[Hel07b] ———, *Local Cohomology and Matlis Duality*, Universität Leipzig, 2007, Habilitationsschrift.

[Hel07c] ———, *Matlis duals of top local cohomology modules and the arithmetic rank of an ideal*, Comm. Algebra **35** (2007), no. 4, 1421–1432.

[Hel09a] ———, *Kommutative Algebra*, Vorlesungsskript (Universität Leipzig), 2009.

[Hel09b] ———, *On the associated primes of Matlis duals of top local cohomology modules II*, to appear in Comm. Algebra (2009).

[Her74] J. Herzog, *Ringe der Charakteristik p und Frobeniusfunktoren*, Math. Z. **140** (1974), 67–78.

[Hoc75] M. Hochster, *Topics in the homological theory of modules over commutative rings*, CBMS Regional conference series, vol. 24, Amer. Math. Soc., 1975.

[Hoc05] ———, *Some finiteness properties of Lyubeznik's F-modules, to appear*, Proceedings of the 2005 Midwest Algebraic Geometry Conference (MAGIC05) (2005).

[Hoc07] ———, *Foundations of tight closure theory*, Lecture Notes, University of Michigan, 2007.

[HS77] R. Hartshorne and R. Speiser, *Local cohomological dimension in characteristic p*, Annals of Math. **105** (1977), 45–79.

[HS93] C.L. Huneke and R.Y. Sharp, *Bass numbers of local cohomology modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), no. 2, 765–779.

[HS07] M. Hellus and J. Stückrad, *Local cohomology and Matlis duality*, Univ. Iagel. Acta Math **45** (2007), 63–70.

[HS08] ———, *Matlis duals of top local cohomology modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 2, 489–498.

[HS09] ———, *Artinianness of local cohomology*, Journal of Commutative Algebra **1** (2009), no. 2, 269–274.

[Hun92] C. Huneke, *Problems on Local Cohomology*, Free Resolutions in Commutative Algebra (Boston) (Craig Huneke David Eisenbud, ed.), Research Notes in Mathematics, no. 2, Jones and Bartlett Publishers, Inc., 1992.

[Kha07] K. Khashyarmanesh, *On the Matlis duals of local cohomology modules*, Archiv der Mathematik **88** (2007), no. 5, 413–418.

[KKA08] K. Khashyarmanesh and F. Khosh-Ahang, *On the finiteness properties of Matlis duals of local cohomology modules*, Proc. Indian Acad. sci. (Math. Sci.) **118** (2008), no. 2, 197–206.

[KS94] A.I. Kostrikin and I.R. Shavarevich (eds.), *Algebra V: homological algebra*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 38, Springer, Berlin, 1994.

[Kun69] E. Kunz, *Characterizations of regular local rings for characteristic* p, Amer. J. Math. **91** (1969), 772–784.

[Kun97] ______, *Einführung in die algebraische Geometrie*, vieweg studium, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.

[Lan93] S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Addison Wesley, 1993.

[Lyu93] G. Lyubeznik, *Finiteness properties of local cohomology modules (an application of D-modules to Commutative Algebra)*, Invent. math. **113** (1993), 41–55.

[Lyu97] ______, *F-modules: applications to local cohomology and D-modules in characteristic* $p > 0$, J. reine angew. Math. **491** (1997), 65–130.

[Lyu00a] ______, *Finiteness properties of local cohomology modules: a characteristic-free approach*, J. Pure Appl. Algebra **151** (2000), no. 1, 43–50.

[Lyu00b] ______, *Finiteness properties of local cohomology modules for regular local rings of mixed characteristic: the unramified case*, Communications in Algebra **12** (2000), 5867–5882.

[Lyu00c] ______, *Injective dimension of D-modules: a characteristic-free approach*, J. Pure Appl. Algebra **149** (2000), no. 2, 205–212.

[Lyu02a] G. Lyubeznik (ed.), *Local cohomology and its applications*, Lecture Notes in pure and applied mathematics, vol. 226, New York, Marcel Dekker, Inc., 2002.

[Lyu02b] ______, *A partial survey of local cohomology*, in *local cohomology and its applications* [Lyu02a], pp. 121–154.

[Mat58] E. Matlis, *Injective modules over Noetherian rings*, Pacific. J. Math. **8** (1958), 511–528.

[Mat86] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, no. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Mel05] L. Melkersson, *Modules cofinite with respect to an ideal*, Journal of Algebra **285** (2005), 649–668.

[Mil03] C. Miller, *The Frobenius endomorphism and homological dimensions*, Commutative Algebra and its Interactions with Algebraic Geometry (Luchezar L. Avramov et. al., ed.), Contemporary Mathematics, vol. 331, American Mathematical Society, 2003, pp. 207–234.

[MV04] T. Marley and J. Vassilev, *Local cohomology modules with infinite dimensional socles*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 12, 3485–3490.

[Ooi76] A. Ooishi, *Matlis duality and the width of a module*, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 573–587.

[PS73] C. Peskine and L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale*, I.H.E.S. Publ. Math. **42** (1973), 47–119.

[Rot08] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2nd ed., Universitext, Springer, Berlin, 2008, Originally published by Academic Press, 1979.

[Ser00] J.-P. Serre, *Local algebra*, Springer, Berlin, 2000.

[Sha70] R. Y. Sharp, *Local cohomology theory in commutative algebra*, Quart. J. Math. Oxford **21** (1970), no. 2, 425–434.

[Sha75] ______, *Some results on the vanishing of local cohomology modules*, Proc. London Math. Soc. **30** (1975), no. 3, 177–195.

[Sha91a] ______, *The Frobenius homomorphism, and local cohomology in regular local rings of positive characteristic*, Journal of Pure and Applied Algebra **71** (1991), 313–317.

[Sha91b] ______, *On the Hartshorne-Speiser-Lyubeznik theorem about artinian modules with a Frobenius action*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (1991), no. 3, 665–670.

[Sin03] A. K. Singh, *Associated primes of local cohomology modules*, Proceedings of the 48th Algebra Symposium (Nagoya University), 2003, pp. 133–145.

[Sin05] B. Singh, *Completion, formal smoothness and cohen structure theorems*, Lecture Notes, Indian Institute of Technology Bombay, 2005.

[Smi86] S. P. Smith, *Differential operators on the affine and projective lines in characteristic* $p > 0$, Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin (Proceedings, Paris 1985 (Berlin), Lecture Notes in Mathematics, no. 1220, Springer, 1986, pp. 157–177.

[Stü08] J. Stückrad, *Castelnuovo-Mumford-Regularität*, Vorlesungsskript (Universität Leipzig), 2008.

[SV86] J. Stückrad and W. Vogel, *Buchsbaum Rings and Applications*, Mathematische Monographien, no. 21, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.

[Wal99] U. Walther, *Algorithmic computation of local cohomology modules and the local cohomological dimension of algebraic varieties*, J. Pure Appl. Alg. **139** (1999), 303–321.

[Yas95] S. Yassemi, *Coassociated primes*, Communications in Algebra **23** (1995), no. 4, 1473 – 1498.

[Yas01] ______, *Cofinite Modules*, Communications in Algebra **29** (2001), no. 6, 2333 – 2340.

[Yos97] K.-I. Yoshida, *Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of dimension one*, Nagoya Math. J. **147** (1997), 179–191.

[Zö88] H. Zöschinger, *Über koassoziierte Primideale*, Math. Scand. **63** (1988), 196–211.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet.
Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

(Ort, Datum)	*(Unterschrift)*